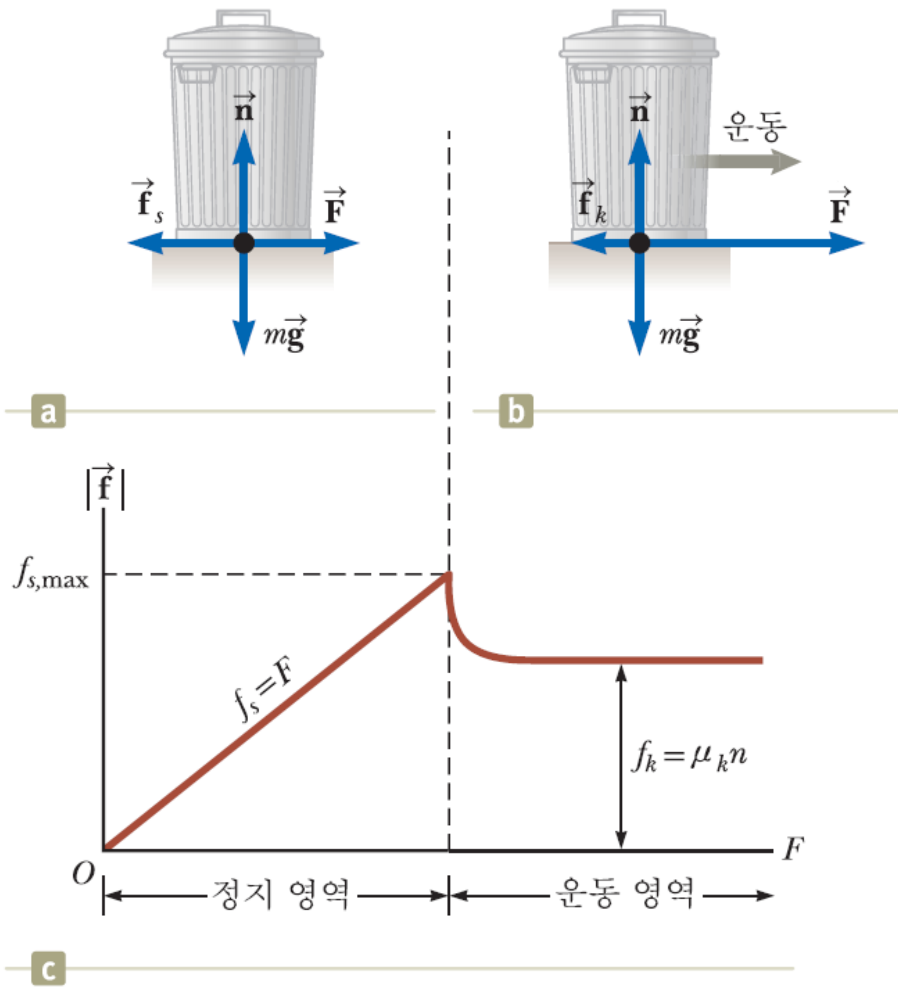
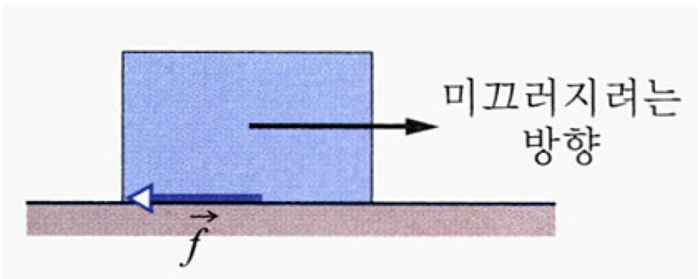
5장 뉴턴 법칙의 응용
(More Applications of Newton's Laws)

마찰력(Frictional force): 표면 마찰력

- 마찰력: 물체가 주위와의 상호 작용 때문에 운동하는 데 받는 저항





- 정지마찰력(static frictional force) : 물체가 정지해 있도록 방해하는 힘

$$f_s \le f_{s,max}, \quad f_{s,max} \propto N$$

$$\therefore f_{s,max} = \mu_s N$$:정지마찰계수

- 운동마찰력(kinetic frictional force) : 물체를 정지상태에 있도록 방해하는 힘

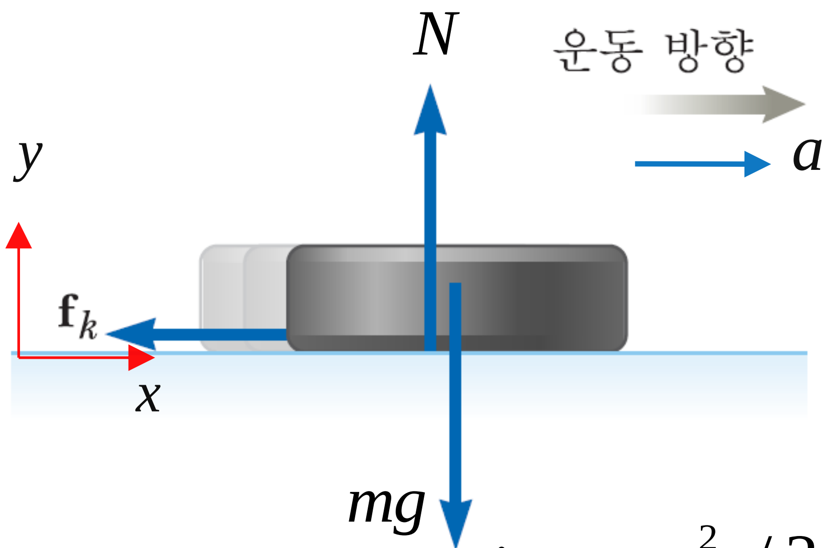
$$f_k \propto N \;\rightarrow\; f_k = \mu_k N$$:운동마찰계수

$$f_k < f_{s,max} \rightarrow \mu_k < \mu_s$$

- **마찰계수는 접촉면의 면적과 거의 무관하다.**

예제 5.1 미끄러지는 하키 퍽

- 얼음 위에 있는 하키 퍽의 처음 속력이 20.0m/s이다. (A) 그 퍽이 얼음 위에서 d=115m를 미끄러진 후 정지한다면, 퍽과 얼음 사이의 운동 마찰 계수를 구하여라. (B) 퍽의 처음 속력이 위에서의 값의 반이라면 도달거리는 얼마나 되는가?



- 하키 퍽에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x: -f_k = ma, \quad y: N - mg = 0$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$\therefore a = -\mu_k g$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = -2\mu_k gd \rightarrow -v_{0x}^2 = -2\mu_k gd$$

$$\therefore \mu_k = v_{0x}^2 / 2gd = (20.0m/s)^2 / 2 \times 9.80m/s^2 \times 115m$$

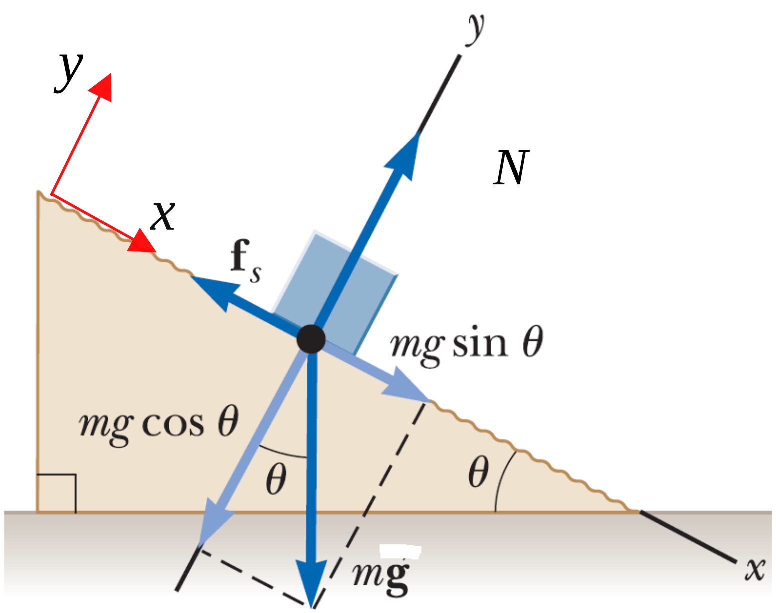
$$= 0.177$$

- 퍽의 처음 속력이 반으로 감소하면

$$v_{0x}^2 = 2\mu_k gd \rightarrow v_{0x}^2 / 4 = 2\mu_k gd' \quad \therefore d' = d/4$$

예제 5.2 실험으로 마찰계수들 결정하기

다음에서 물체와 거친 표면 사이의 마찰 계수를 측정하는 간단한 방법을 알아보자. 그림 5.4와 같이 수평면에 대해 기울어진 비탈면에 물체를 둔다. 이때 비탈면의 경사를 수평에서 물체가 막 미끄러질 때까지 서서히 증가시키자. 물체가 미끄러지기 시작할 때의 임계각 θ_c를 측정해서 μ_s를 얻을 수 있음을 보여라.



- 물체에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x : mgsin\theta - f_s = ma,$$

$$y : N - mgcos\theta = 0$$

- 경사면의 각도를 0도에서 천천히 증가시킬 때 중력의 x-성분이 최대정지마찰력과 같은 순간부터 미끄러지기 시작한다.

$$a = gsin\theta - f_s / m \geq 0,$$

$$f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mgcos\theta$$

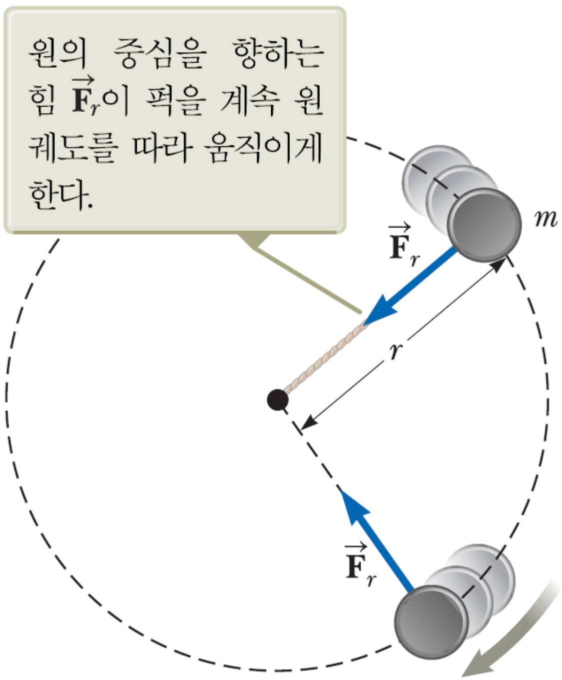
$$\therefore gsin\theta_c - f_{s,max} / m = 0 \rightarrow gsin\theta_c - \mu_s mgcos\theta_c / m = 0 \quad \therefore \mu_s = tan\theta_c$$

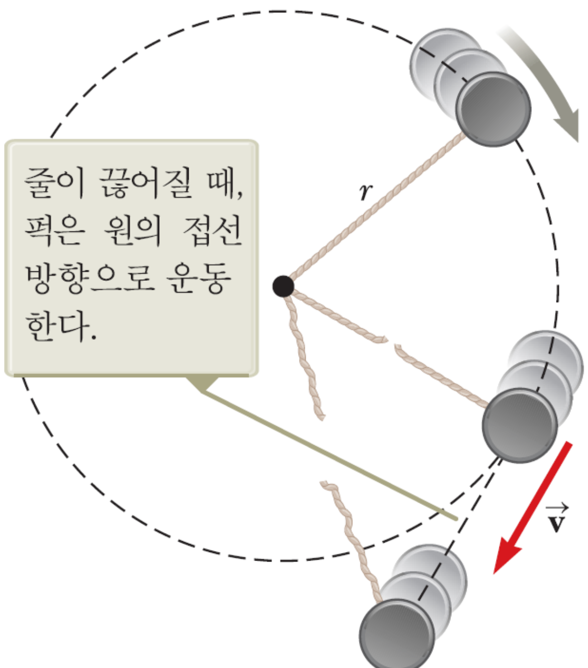
- 각도를 임계각보다 작게 줄이면 어느 새로운 임계각에서 운동마찰력과 중력의 x-성분이 같아 가속도가 0이 된다. 즉, 등속 운동하는 경우로부터

$$0 = gsin\theta_c' - f_k / m \rightarrow 0 = gsin\theta_c' - \mu_k mgcos\theta_c' / m \quad \therefore \mu_k = tan\theta_c'$$

등속 원운동하는 입자 모형의 확장: 구심력

- 등속 원운동은 원의 중심을 향하는 구심력(centripetle force)에 의해 발생하며 그 때 가속도가 구심가속도이다.
- 구심력은 새로운 종류의 힘이 아니며 단지 물체를 등속 원운동하도록 만드는 힘을 말한다.





$$\Sigma F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

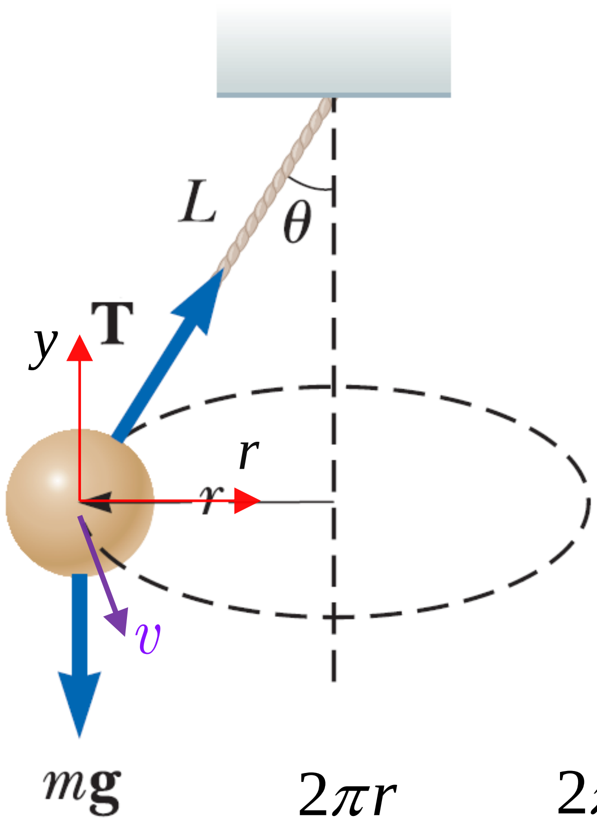
$$\therefore \Sigma F = F_c = \frac{mv^2}{r}$$

- 구심력은 속도의 제곱과 질량에 비례하고 반지름에 반비례하는 형태로 표현된다.

$$T = \frac{mv^2}{r}$$

예제 5.5 원뿔 진자

- 질량 m인 작은 공이 길이 L인 줄에 매달려 있다. 그림에서처럼 이 공은 수평면에서 반지름 r인 원 위를 일정한 속력 v로 돌고 있다. 진자의 속력 v에 대한 식을 구하라.



- 공에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$r: T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}, \quad y: T\cos\theta - mg = 0$$

$$\rightarrow T\cos\theta = mg$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta},\ r = L\sin\theta$$

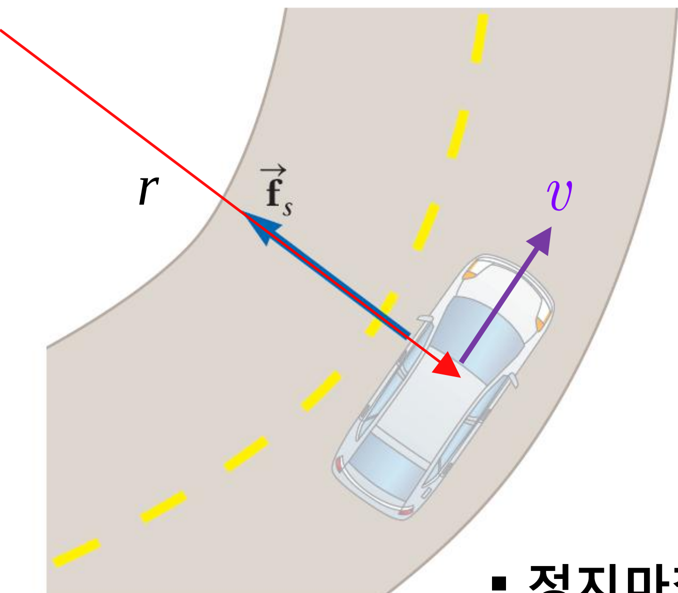
$$= \sqrt{L\sin\theta \times g\tan\theta}$$

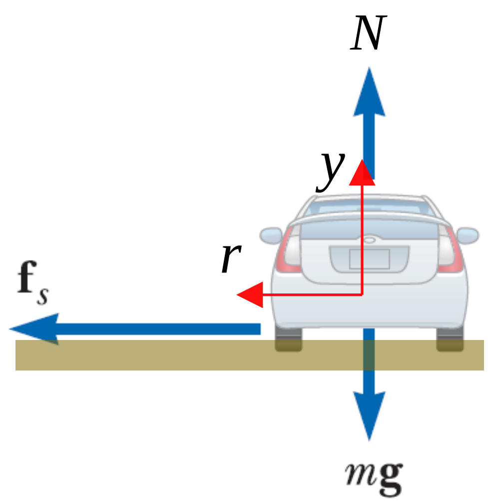
$$= \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L\sin\theta}{\sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\sin\theta}{g\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{L\cos\theta / g}$$

예제 5.6 자동차의 최대 속력은 얼마인가?

- 1500 kg의 자동차가 평탄하고 수평인 곡선 도로에서 커브를 돌고자 한다. 커브의 곡률 반지름이 35.0m이고 바퀴와 건조한 노면 사이의 마찰 계수가 0.523일 때, 자동차의 길에서 안전하게 커브를 돌 수 있는 최대 속력을 구하라.





- 자동차에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$r : f_s = \frac{mv^2}{r},$$

$$y : N - mg = 0$$

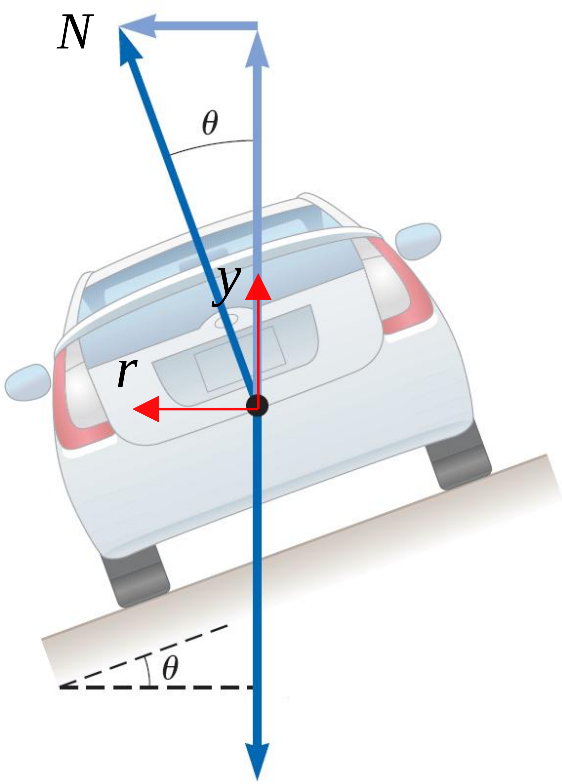
- 정지마찰력은 최대 정지마찰력보다 항상 작거나 같다.

$$f_s \le f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mg \quad \therefore f_s = \frac{mv^2}{r} \le \mu_s mg$$

$$\rightarrow v^2 \le \mu_s rg,\ v \le \sqrt{\mu_s rg} \quad \therefore v_{max} = \sqrt{\mu_s rg} = 13.4 m/s$$

예제 5.7 옆으로 경사진 길

▪ 한 토목 기술자가 예제 5.6에서 나온 곡선 도로를 다시 설계해서 달리는 자동차가 마찰에 관계없이 미끄러지지 않게 하고자 한다. 다시 말해서 설계 속력으로 달리는 자동차는 길이 얼음처럼 미끄러워도 곡선길을 안전하게 달릴 수 있게 하고자 한다. 이런 길을 보통 옆으로 경사진 길이라고 한다. 즉 이것은 이 장의 도입부 사진에 나와 있는 것처럼 길이 곡선 안쪽으로 경사져 있다는 뜻이다. 이런 길의 설계 속력이 13.4 m/s(30 mi/h)이고 곡선 도로의 곡률 반지름이 35.0 m라 할 때 이 길은 얼마나 안쪽으로 기울어져야 하는가?



▪ 자동차에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$r : N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}, \quad y : N\cos\theta - mg = 0$$

$$\rightarrow N\cos\theta = mg$$

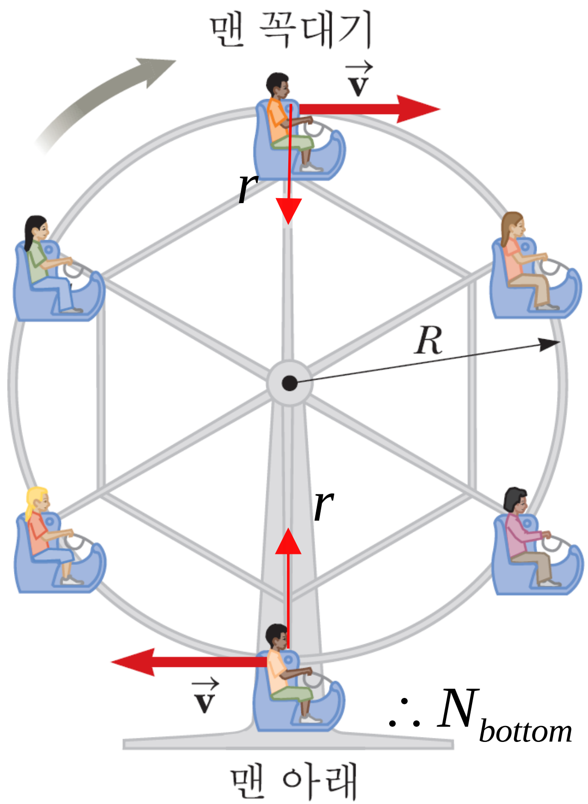
$$\therefore \tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(13.4m/s)^2}{35.0m \times 9.80m/s^2}$$

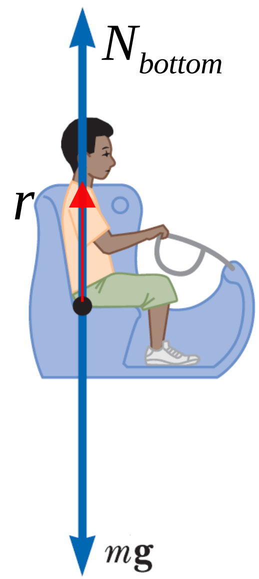
$$= 0.523$$

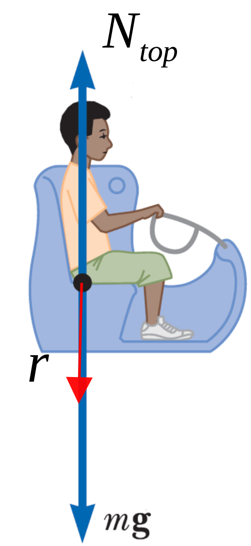
$$\therefore \theta = \tan^{-1}(0.523) = 27.6^\circ$$

예제 5.8 회전식 관람차

- 질량 m인 어린이가 그림 5.12a처럼 회전식 관람차를 타고 있다. 어린이는 반지름이 10.0 m인 연직 원 위를 3.00 m/s의 일정한 속력으로 운동한다. 관람차가 연직 원의 맨 아래와 맨 위에 있을 때 좌석이 어린이에게 작용하는 힘을 구하라. 답을 어린이의 무게 mg로 표현하라.







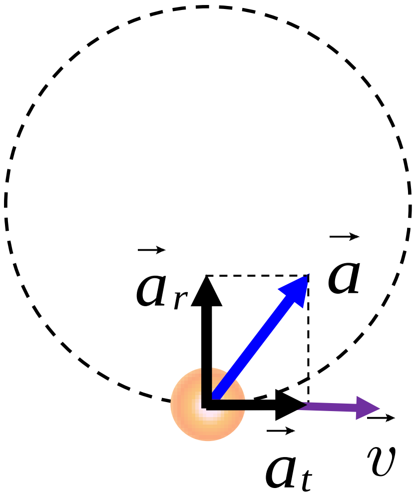
$$r: N_{bottom} - mg = \frac{mv^2}{r}, \qquad r: mg - N_{top} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\therefore N_{bottom} = mg + \frac{mv^2}{r} = 1.09mg \qquad \therefore N_{top} = mg - \frac{mv^2}{r} = 0.908mg$$

비등속 원운동(Non-uniform Circular Motion)

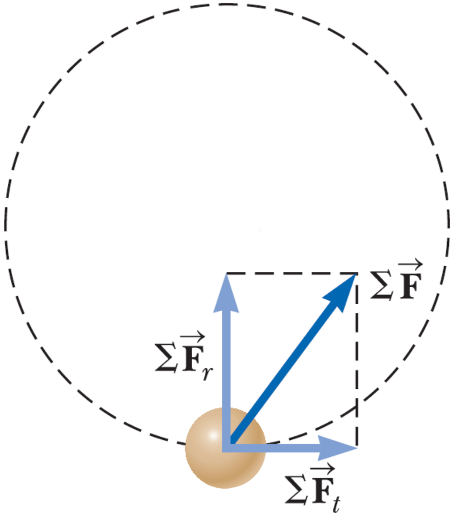
- 일정하지 않은 속력으로 원형궤도를 그리는 원운동의 가속도: 지름 성분 외에 접선 성분 존재

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$



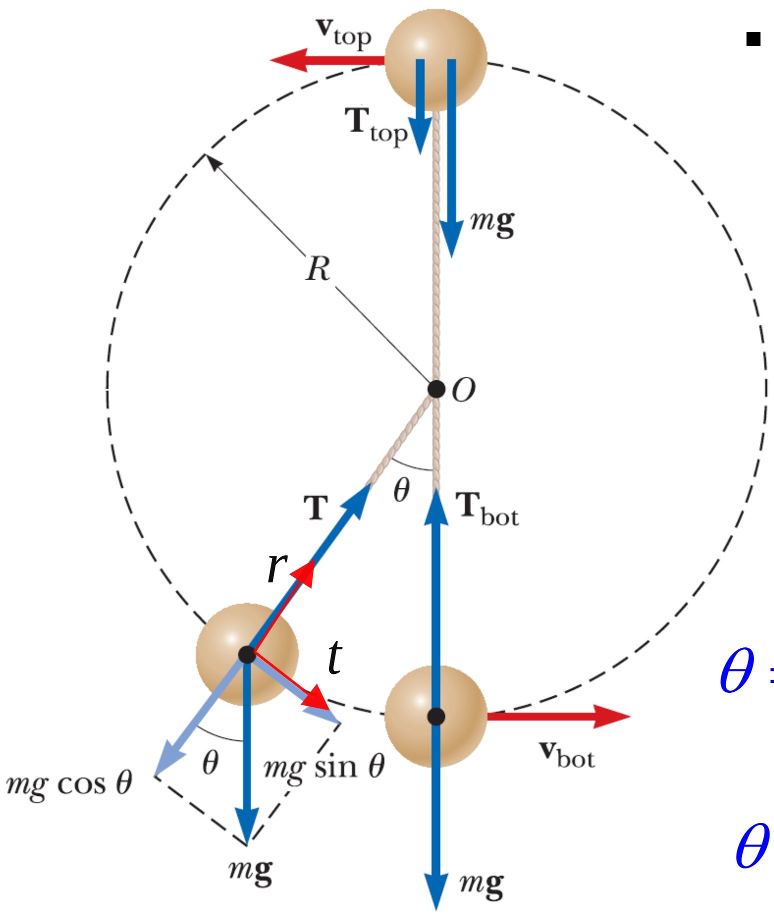
$$a_r = -\frac{v^2}{r}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,|\vec{v}|}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \sum \vec{F} = \sum \vec{F}_r + \sum \vec{F}_t$$



예제 5.9 공에 주목

- 그림처럼 질량 m인 작은 구가 길이 R의 줄 끝에 매달려 고정된 점 O를 중심으로 연직 평면에서 원운동을 하고 있다. 이 구의 속력이 v이고 줄이 연직방향과 어떤 각도를 이루고 있을 때 구의 접선 가속도와 줄의 장력을 구하라.



- 작은 구에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$r: T - mg\cos\theta = ma_r = \frac{mv^2}{R},$$

$$t: mg\sin\theta = ma_t \rightarrow a_t = g\sin\theta$$

$$\therefore T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R} = mg\left(\cos\theta + \frac{v^2}{Rg}\right)$$

$$\theta = 180^\circ \rightarrow a_t = 0,\ T = mg\left(\frac{v_{top}^{\ 2}}{Rg} - 1\right)$$:맨 위

$$\theta = 0^\circ \rightarrow a_t = 0,\ T = mg\left(\frac{v_{bot}^{\ 2}}{Rg} + 1\right)$$:맨 아래

속도에 의존하는 저항력을 받는 운동

- 유체(액체 또는 기체) 안에서 물체가 움직이면 유체는 그 안에서 움직이는 물체에 저항력(resistive force)을 작용한다.

- 저항력의 방향은 언제나 물체의 매질에 대한 상대적인 운동 방향과 반대이고, 크기는 속력에 따라 복잡한 방식으로 변한다.

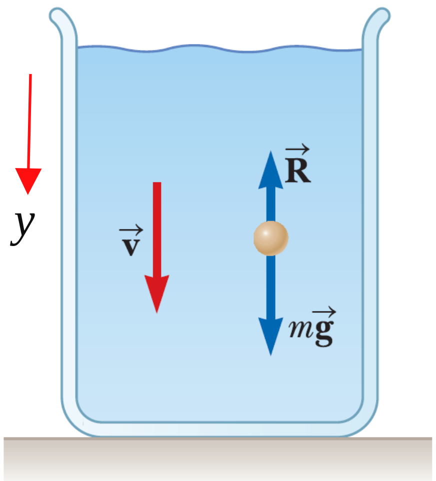
모형 1: 물체의 속도에 비례하는 저항력 (Model 1: Resistive Force Proportional to Object Velocity)

- 액체나 기체 속을 운동하는 물체에 작용하는 저항력이 물체의 속도에 비례하는 경우: 액체 속에서 천천히 떨어지는 물체나 공기중의 먼지와 같은 매우 작은 물체에 근사적으로 적용

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

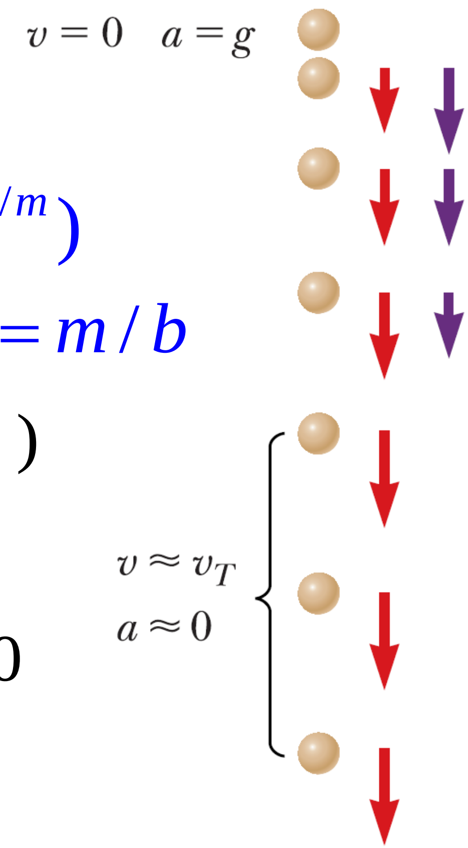
b : 물체의 모양과 크기 그리고 매질의 성질에 의존하는 상수
v : 물체의 매질에 대한 상대 속도

속도에 의존하는 저항력을 받는 운동: 속도에 비례하는 저항력



- 질량 m인 공에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$y: mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

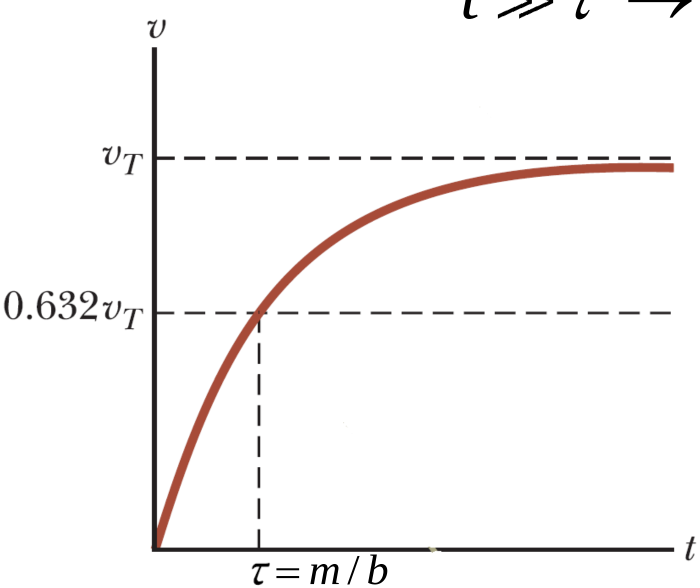


$$\therefore \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \rightarrow v = v_T\left(1 - e^{-bt/m}\right)$$

$$= v_T\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = m/b$$

$$t \gg \tau \rightarrow (v \rightarrow v_T, \ a = dv/dt \rightarrow 0)$$

: 종단 속력(terminal speed)



$$a \rightarrow 0 \ \therefore mg - bv_T = 0$$

$$\therefore v_T = mg/b$$

- 시간상수(time constant) τ 는 물체가 얼마나 빨리 종단속력에 도달하는지의 척도가 되는 시간이다.

모형 2: 물체 속력의 제곱에 비례하는 저항력
(Model 2: Resistive Force Proportional to Object Speed Squared)

- 비행기, 스카이다이버, 자동차 또는 야구공처럼 공기 속에서 빠른 속력으로 운동하는 물체들에 대해서, 저항력이 속력의 제곱에 비례하는 것으로 비교적 잘 모형화할 수 있다.

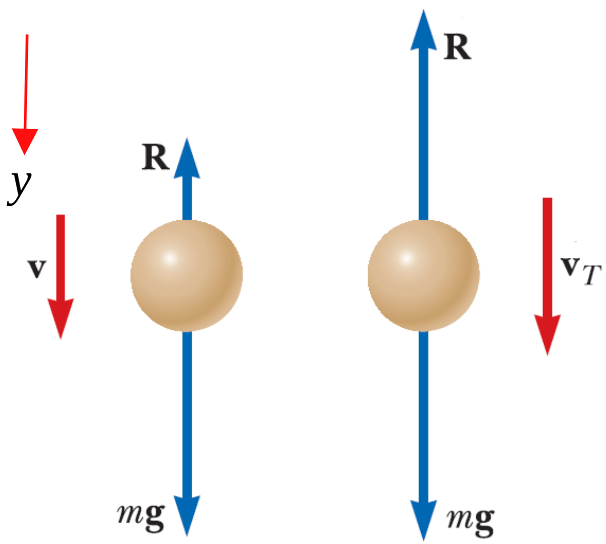
$$R = cv^2, \; c = \tfrac{1}{2} D\rho A$$

D (끌림 계수)*:* 경험적으로 얻어지는 차원이 없는 양
ρ: 공기의 밀도
A: 운동하는 물체의 속도(운동 방향)에 수직인 평면에서 측정한 물체의 단면적

속도에 의존하는 저항력을 받는 운동: 속력의 제곱에 비례하는 저항력

$$R = cv^2, \; c = \tfrac{1}{2} D \rho A$$

- 질량 m인 물체가 정지 상태에서 자유 낙하하는 경우 뉴턴의 2법칙을 적용하면



$$y : mg - cv^2 = ma = m\,dv/dt$$

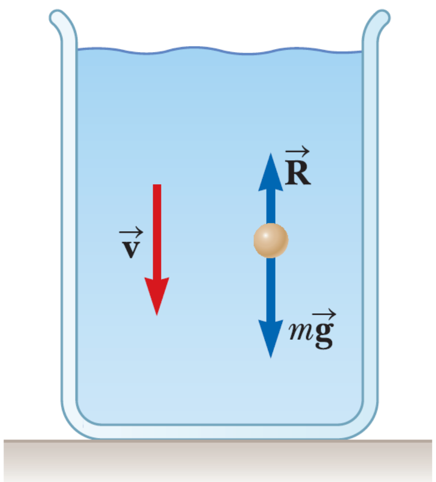
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v^2 \rightarrow v(t) = ?$$

$$\text{As } t \gg 0,\; R \rightarrow mg \;\; \text{then } a = \frac{dv}{dt} \rightarrow 0,\;\; v \rightarrow v_T$$

$$\therefore g - \frac{c}{m} v_T^2 = 0 \;\rightarrow v_T = \sqrt{\frac{mg}{c}} = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$

연습문제 5.20(p.153)

- 작은 조각의 스티로폼 포장이 지상 2.00 m 위에서 낙하한다. 종단 속력에 도달할 때까지 이 스티로폼의 가속도의 크기는 a=g-Bv 로 주어진다. 0.500 m 낙하 후에 스티로폼은 종단 속력에 도달하고, 지상에 도달하기까지 5.00 s가 더 걸렸다고 한다. (a) 상수 B의 값은 얼마인가? (b) t =0 일 때 가속도는 얼마인가? (c) 속력이 0.150 m/s일 때 가속도는 얼마인가?



- (a) 스티로폼이 종단속력에 도달하면 가속도는 0이므로

$$a = g - Bv = 0 \quad \therefore v_T = g / B$$

$$then\ d = v_T T \rightarrow 1.500m = v_T \times 5.00s$$

$$\therefore v_T = 1.500m / 5.00s = 0.300m / s$$

$$\therefore B = g / v_T = (9.80m / s^2) / (0.300m / s) = 32.7s^{-1}$$

- (b) t=0일 때 $v = 0 \quad \therefore a = g = 9.80m / s^2$

- (c) v=0.150일 때 $a = g - Bv = 9.80m / s^2 - 32.7s^{-1} \times 0.150m / s$

$$= 4.90m / s^2$$

연습문제 5.20(p.153)

- 스케이트 선수에 작용하는 저항력이 $f=-kmv^2$ 이고 속력 v의 제곱에 비례한다고 하자. 여기서 k는 비례상수이고, m은 선수의 질량이다. 선수가 결승점을 지난고 난 직후 속력이 v_i 이고 이후에 직선 방향으로 미끄러져 가면서 속력이 떨어진다. 선수의 속력이 결승점을 통과 후 시간 t에 대해 $v(t)=v_i/(1+ktv_i)$ 임을 보여라.

  - 스케이트 선수에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x:-kmv^2=ma \quad \therefore a=dv/dt=-kv^2$$

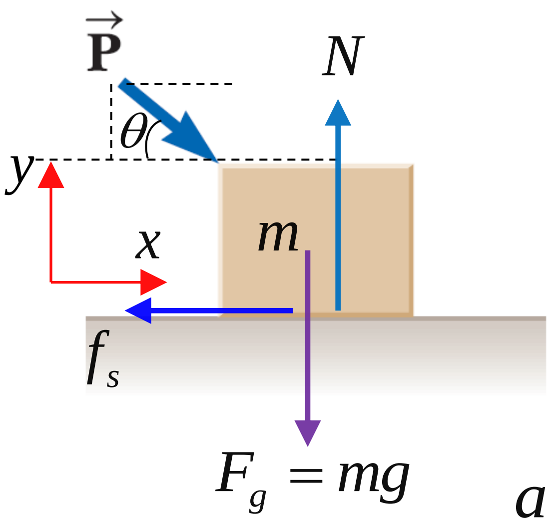
$$Then,\ \frac{dv}{v^2}=-kdt \rightarrow \int_{v_i}^{v} v^{-2}dv=-k\int_0^t dt$$

$$\therefore \left[-\frac{1}{v}\right]_{v_i}^{v}=-kt \rightarrow \frac{1}{v_i}-\frac{1}{v}=-kt \rightarrow \frac{1}{v}=\frac{1}{v_i}+kt \rightarrow \frac{1}{v}=\frac{1+v_ikt}{v_i}$$

$$\therefore v=\frac{v_i}{1+v_ikt}$$

연습문제 5.27(p.153-4)

▪ 그림에서처럼 무게가 F_g 인 상자를 평평한 마루 위에서 힘 P로 밀고 있다. 정지 마찰 계수가 μ_s 이고 힘 P는 수평방향에서 그림처럼 작용한다. 이 때 (a) 상자를 움직일 수 있는 P의 최소값은 얼마인가?



▪ 상자에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x: P\cos\theta - f_s = ma,$$

$$y: N - F_g - P\sin\theta = 0 \rightarrow N = F_g + P\sin\theta$$

$$\therefore a = \frac{P\cos\theta - f_s}{m} \geq 0, \quad f_{s,max} = \mu_s N$$

$$= \mu_s (F_g + P\sin\theta)$$

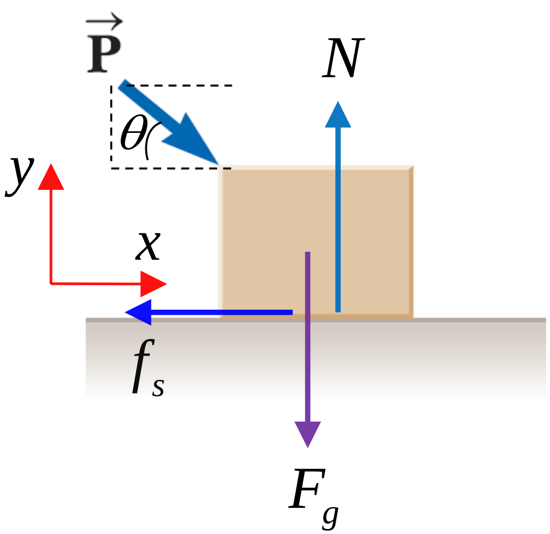
$$a = 0 \rightarrow P_{min}\cos\theta - f_{s,max} = 0$$

$$\therefore P_{min}\cos\theta - \mu_s(F_g + P_{min}\sin\theta) = 0 \rightarrow P_{min}(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = \mu_s F_g$$

$$Thus, \quad P_{min} = \frac{\mu_s F_g}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)} = \frac{\mu_s F_g \sec\theta}{(1 - \mu_s\tan\theta)}$$

연습문제 5.27(p.153-4)

- (b) 어떤 크기의 힘 P를 작용하더라도 상자가 움직일 수 없는 각도 구간이 있다. 이 각도 구간을 μ_s에 대한 식으로 구하라.



- 상자가 움직이려면 가속도가 0 이상이어야 한다.

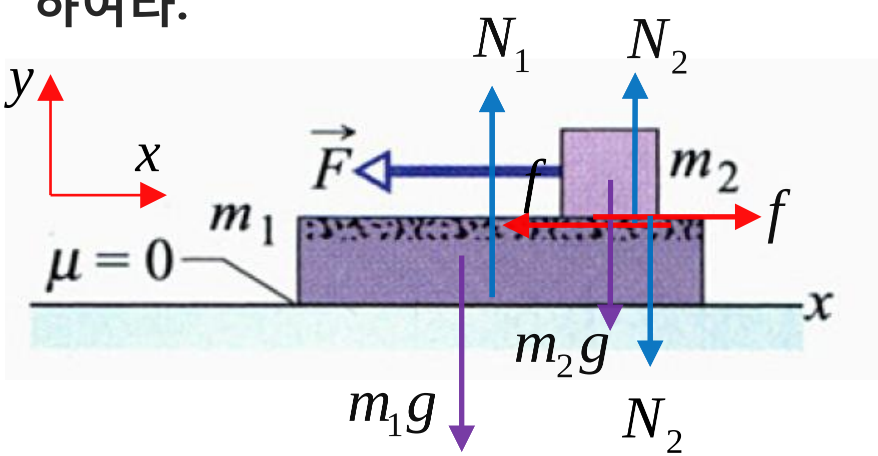
$$a = \frac{P\cos\theta - f_{s,max}}{m} > 0 \rightarrow P\cos\theta > \mu_s(F_g + P\sin\theta)$$

$$\therefore P(1-\mu_s\tan\theta) > \mu_s F_g \sec\theta$$

$$\therefore \mu_s\tan\theta > 1 \rightarrow \tan\theta > 1/\mu_s$$

심화문제 1

- 그림처럼 40kg의 널빤지가 마찰이 없는 마루에 놓여 있고, 그 위에 10kg의 토막이 놓여 있다. 토막과 널빤지의 정지마찰계수 0.60이고 운동마찰계수는 0.40이다. 100N 크기의 수평력으로 10kg의 토막을 끌 때 토막과 널빤지의 가속도를 각각 구하여라.



$$m_1 = 40kg,\ m_2 = 10kg \quad \mu_s = 0.60,\ \mu_k = 0.40$$

- 널빤지 m1에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x: -f = m_1 a_1,\ y: N_1 - N_2 - m_1 g = 0$$

- 토막 m2에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x: -F + f = m_2 a_2,\ y: N_2 - m_2 g = 0$$

$$\therefore N_2 = m_2 g, N_1 = (m_1 + m_2)g, \quad f_k = \mu_k N_2 = \mu_k m_2 g = 39.2N$$

$$f_{s,max} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g = 58.8N < F = 100N$$

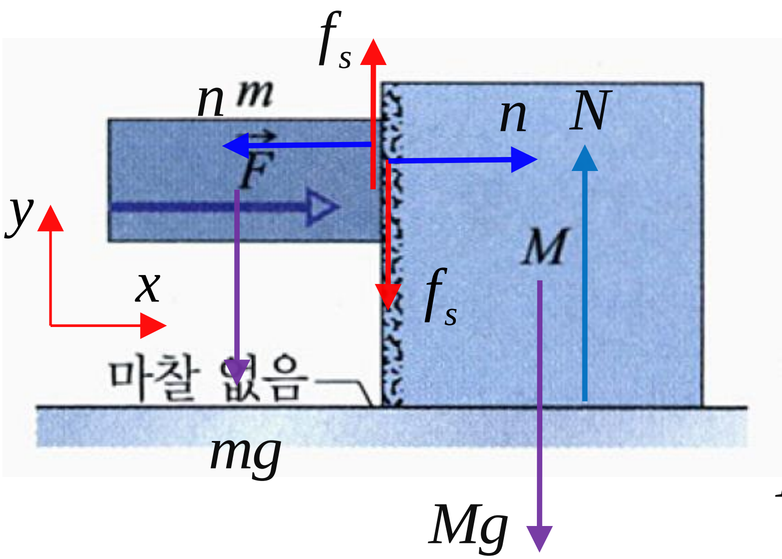
$$\therefore m_1 a_1 = -f_k = -\mu_k N_2 = -\mu_k m_2 g \to a_1 = -\mu_k m_2 g / m_1 = -0.98m/s^2$$

$$m_2 a_2 = f_k - F \to a_2 = (f_k - F)/m_2 = (39.2 - 100)N/10kg$$

$$= -6.08m/s^2$$

심화문제 2

- 그림처럼 두 토막(m=16kg, M=88kg)은 서로 붙어 있지 않다. 두 토막 사이의 정지마찰계수는 0.33이고, 큰 토막과 바닥 사이에는 마찰이 없다. 작은 토막이 미끄러져 내려오지 않을 수평력 F의 최소 크기를 구하여라.



- 토막 M에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x: n = Ma_x,\ y: N - Mg - f_s = 0$$

- 토막 m에 뉴턴의 2법칙을 적용하면

$$x: F - n = ma_x,\ y: f_s - mg = 0$$

$$Here,\quad f_s = mg \le f_{s,max} = \mu_s n,\quad \frac{n}{F-n} = \frac{M}{m}$$

$$\rightarrow nm = M(F-n)\quad \therefore n = \frac{MF}{M+m}\quad Then,\quad mg \le \mu_s \frac{MF}{M+m}$$

$$\rightarrow F \ge mg(M+m)/\mu_s M\quad \therefore F_{min} = mg(M+m)/\mu_s M$$

$$= 562N$$