

한국논리학회

2013년 여름 정기학술대회

일시: 2013년 7월 12일 금요일 13시 - 18시

장소: 동덕여자대학교 대학원건물 210호

■ 개 요 ■

- 강연일정
- 특별강연 : 이종권(중앙대), “한국논리학회의 역사”
- 발 표1 : 김준걸(경상대), “산수의 논리적 토대”
- 발 표2 : 이진희(아주대), “고차 모호성과 분명한 경계 사례”
- 발 표3 : 송하석(아주대), “거짓말쟁이 문장은 무모순율의 반례인가”
- 발 표4 : 김한승(국민대) & 김명석(국민대), “두 딸의 문제에 관한 대화”

■ 강연일정

시 간	강 연 일 정
13:00 ~ 13:10	등 록 및 개 회 개 회 사: 최원배 선생님(한국논리학회 회장)
13:10 ~ 13:40	1부 특별 강연 사 회: 정인교 선생님(고려대) 특별강연: 이종권 선생님(중앙대) “한국논리학회의 역사”
13:40 ~ 13:50	휴 식 (10분)
13:50 ~ 17:30	2부 논문 발표 사 회: 박일호 선생님(경희대)
13:50 ~ 14:40	발 표 1: 김준걸 선생님(경상대) “산수의 논리적 토대”
14:40 ~ 15:30	발 표 2: 이진희 선생님(아주대) “고차 모호성과 분명한 경계”
15:30 ~ 15:50	휴 식 (20분)
15:50 ~ 16:40	발 표 3: 송하석 선생님(아주대) “거짓말쟁이 문장은 무모순율의 반례인가?”
16:40 ~ 17:30	발 표 4: 김한승 선생님(국민대), 김명석 선생님(국민대) “두 딸의 문제에 관한 대화”
17:30 ~ 18:00	3부 총 회 사 회: 박병철 선생님(부산외대)

특별강연 :

“한국논리학회의 역사”

특별강연: 이종권 선생님(중앙대)

발 표 1:

“산수의 논리적 토대”

발표자 : 김준걸 선생님(경상대)

A Logical Foundation of Arithmetic

Joongol Kim (joongolk@gmail.com)

Gyeongsang National University

Abstract. This paper presents a logical framework (ALA) which allows numerical variables to occur simultaneously in singular term position and in the ‘adverbial’ position of the ‘ n ’ in ‘ F s exist n -wise’. It will be shown that the basic concepts of arithmetic can be explicitly defined in ALA in purely logical terms, and the Dedekind-Peano axioms can be derived in ALA solely from those definitions.

1. The Language and Rules of ALA

ALA is a two-sorted logic,¹ and as such has two sorts of individual variables: generic individual variables such as $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, etc, and numerical variables such as $n, m, l, n_1, m_1, l_1, n_2, m_2, l_2$, etc. The former are called *generic* in the sense that they may range over individuals of any given sort, whether they be physical objects, persons, sets or whatnot. Numerical variables are *specific* in that they denote individuals of a particular sort, namely cardinal numbers. Both generic and numerical variables will be used quite often as parameters.

Although the two sorts of variables have their own associated domains, the domains may coincide since generic individual variables may themselves range over (cardinal) numbers. To illustrate, the sentence ‘there are 4 primes between 1 and 10’, which can be paraphrased as ‘there are 4 x s such that x is a prime and x is between 1 and 10’, immediately implies in ALA that there is an n such that there are n x s such that x is a prime and x is between 1 and 10’. Here the numerical variable n is associated with a domain of numbers; but assuming the standard interpretation of the language of arithmetic, the generic variable x will also range over its own domain of numbers. This is in fact as it should be, for a distinction is called for between the numbers that are being counted (the x s) and the numbers used for counting (the n s).

¹ For a quick useful guide to many-sorted logic, see Enderton 2001, sect. 4.3.

As a second-order logic, ALA also has predicate variables. First, there are two sorts of monadic predicate variables: generic variables— $F, G, H, F_1, G_1, H_1, F_2, G_2, H_2$, etc.—and numerical variables— P, P_1, P_2 , etc. In addition to relations between generic individuals themselves and those between numbers themselves, we will also allow cross-sortal relations between generic individuals and numbers. So in principle there should be three sorts of dyadic predicate variables in ALA, corresponding to the three sorts of relations. Instead, however, the variables R, R_1, R_2 , etc. will be used as *sort-neutral* dyadic predicate variables which range over all three sorts of relations. This is no problem as it will be clear from context which is meant. Variables for more than dyadic relations or for any functions will not be needed.

ALA has no primitive individual constants, function symbols or predicates, including the identity sign. If we use μ and ν as meta-variables for generic individual terms and numerical terms, and Φ as a meta-variable for generic predicate variables and numerical predicate variables, then identity between generic individuals and between numbers can be defined in ALA as follows:

Definition 1.1. $\mu = \nu =_{Df} \forall \Phi (\Phi \mu \leftrightarrow \Phi \nu)$.²

Since an identity statement makes sense only when an appropriate criterion of identity can, in principle, be given, and a criterion of identity can only be provided for individuals of the same sort, it will be assumed that identity is not a cross-sortal relation. Thus, the identity sign shall never appear between a generic individual term and a numerical term, including when the generic term happens to be a number-denoting term.

ALA has two primitive truth-functional connectives, ‘ $\neg$ ’ (‘it is not the case that’) and ‘ $\wedge$ ’ (‘and’); all the other truth-functional connectives can be defined as usual. Also, ALA has one primitive operator for logical necessity, namely ‘ $\Box$ ’ (‘it is logically true that ...’). The logical possibility operator ‘ $\Diamond$ ’ (‘it is not logically false that ...’), the strict connective for logical implication ‘ $\Rightarrow$ ’ (‘it is logically true that if ... then ...’), and the strict connective for logical equivalence ‘ $\Leftrightarrow$ ’ (‘it is logically true that ... if and only if ...’), can be defined in terms of ‘ $\Box$ ’ as usual.³

² The identity of indiscernibles, which follows from the definition, is to be viewed as a consequence of standard semantics for second-order logic (Shapiro 1991, 91), not as a controversial metaphysical thesis.

³ The strict connective ‘ $\Rightarrow$ ’ can be adopted as a primitive symbol, and then the necessity operator ‘ $\Box$ ’ can be introduced by defining ‘ $\Box \phi$ ’ as ‘ $(\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi$ ’.

Finally, ALA has the existential quantifier symbol ‘ $\exists$ ’ (‘there is’). The universal quantifier symbol, ‘ $\forall$ ’ (‘for any’), can be defined as usual in terms of ‘ $\exists$ ’. Also, numerical quantifiers of the form ‘ $\exists_n$ ’ (‘there are n ’, or more precisely, ‘exist n -wise’) will be introduced by explicit definition in the next section.

Familiarity with standard formation and inference rules for first- and second-order logic (such as found in Prawitz 1965) is assumed. The formation rule for $\Box$ is: if ϕ is a formula, then so is $\Box\phi$. A formula will be called *modal* if its main logical constant is $\Box$. Let Γ be a finite, possibly empty set of formulas. Then the introduction and elimination rules for $\Box$ can be given as follows:

$$\Box\text{I: } \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \Box\phi} \text{ (each formula in } \Gamma \text{ is modal or the negation of a modal formula)} \quad \Box\text{E: } \frac{\Gamma \vdash \Box\phi}{\Gamma \vdash \phi}$$

$\Box\text{I}$ and $\Box\text{E}$ together yield a modal system corresponding to S5 with quantifiers (Prawitz 1965, pp. 74–75). Notice that the two rules imply that $\vdash \phi \rightarrow \psi$ if and only if $\vdash \phi \Rightarrow \psi$. However, ‘ $\phi \rightarrow \psi$ ’ and ‘ $\phi \Rightarrow \psi$ ’ still differ in content since it is not the case that $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \Rightarrow \psi)$. The restriction placed on Γ in $\Box\text{I}$ blocks the transition from $\{\phi \rightarrow \psi, \phi\} \vdash \psi$ to $\phi \rightarrow \psi \vdash \phi \Rightarrow \psi$.

The last item in ALA is a comprehension schema:

$$\text{COMP } \exists \chi^n \forall \mu_1 \dots \forall \mu_n (\chi^n \mu_1 \dots \mu_n \leftrightarrow \varphi(\mu_1, \dots, \mu_n)),$$

where χ^n is an n -adic—in fact monadic or dyadic since no predicate variables for more than dyadic relations are needed for our purposes—predicate variable, generic or numerical, each of μ_1 through μ_n is an individual variable, generic or numerical, and χ^n does not occur free in φ .

2. The Basic Concepts of Arithmetic in ALA

The language of ALA is purely logical and has no primitive non-logical symbols. Yet all the basic concepts of arithmetic can be defined in ALA, as will be shown in this section.

One aspect of the definitional extension of the language of ALA needs some comment. Standard first-order logic treats the number word ‘ n ’ in ‘there are n F s’ as a non-denoting expression to be paraphrased away in terms of quantifiers and the identity sign; in contrast, ALA treats it as a genuine denoting expression that singles out a number and so is capable of being replaced with a numerical variable. Thus, although the

numerical terms to be introduced below in Definitions 2.1–2.5 are purely logical just as they are in standard logic, they are given a new use in ALA in which they form genuine terms that can be bound by a quantifier. What is needed to justify quantifying into the position of the ‘ n ’ in ‘there are n F s’, and thus validate the use of number words as denoting expressions, is to show that a genuine relation of identity holds between any two numbers m and n when they appear in the contexts ‘there are m F s’ and ‘there are n F s’. This will be a core part of the task of this section.

Since our approach is to take number words to appear primarily in the context ‘ F s exist n -wise’,⁴ or its colloquial equivalent ‘there are n F s’, all numerical constants and term-forming operators will accordingly be defined in that context. Thus, all those definitions will be contextual definitions. However, this is not to say that they are implicit definitions, that is, those which define a term by stipulating a sentence (or sentences) containing the term to be true. It only means that the defined term will be a part of the definiendum which is defined to have the same meaning as the definiens.⁵

First, the numerical constant ‘1’ can be introduced by defining ‘there is 1 F ’ to have the same meaning as ‘there is an F ’:

Definition 2.1. $\exists_1 x(Fx)$ (‘there is 1 F ’) $=_{Df}$ $\exists x(Fx)$.

Here the defined term ‘1’ occurs as a part of the definiendum ‘ $\exists_1 x(Fx)$ ’ which is defined to have the same meaning as the definiens ‘ $\exists x(Fx)$ ’. Note that only the defined term is supposed to be thereby given a new meaning, and the meaning of all the other expressions in the definiendum is assumed to be already known. That is, Def. 2.1 explains what it is for F s to exist ‘1-wise’, assuming that it is known what it is for F s to exist.

Given the above definition of ‘1’, ‘0’ can be defined as follows:

Definition 2.2. $\exists_0 x(Fx)$ (‘there are 0 F s’) $=_{Df}$ $\neg(\exists_1 x(Fx))$.

But, for the sake of simplicity of exposition, hereafter the number 1 will be taken as the smallest cardinal number.

⁴ To prevent misunderstanding, it should be noted that in ALA the ‘ n ’ itself is supposed to function adverbially in ‘ F s exist n -wise’. The suffix ‘-wise’ is dispensable from the logical point of view; it is used in the English paraphrases of ALA formulas of the form ‘ $\exists_n x(Fx)$ ’ only because, as it happens, number words do not function adverbially in English.

⁵ For the distinction between the defined term and the definiendum, see Gupta 2012, sect. 2.

Next, we define the arithmetical operations of successor, addition and multiplication in ALA. First, the successor operation can be defined in the usual manner:

Definition 2.3. $\exists_{n'}x(Fx)$ ('there are n' F s') $=_{Df}$ $\exists_1y(Fy \wedge \exists_nx(Fx \wedge y \neq x))$.

Def. 2.1 and Def. 2.3 together provide for the definition of formulas of the form ' $\exists_nx(Fx)$ ' for any natural number n : if n is a natural number, then ' $\exists_nx(Fx)$ ' will be equivalent to ' $\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_n(Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \cdots \wedge Fx_n \wedge x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n)$ '.

The defined term in Def. 2.3 is just the successor sign ' $'$ ', not the whole numerical symbol ' n' '. If it were the latter, the numerical variable n occurring in the definiens would make no sense. That means that in Def. 2.3 the meaning of the variable n (as well as the meaning of the expressions ' $\exists$ ', ' x ' and ' F ') is assumed to be already known. Frege (1884, § 56) considered some definitions similar to Def. 2.1–Def. 2.3 as a possible base for a foundation of arithmetic, and rejected them by arguing that the assumption (made in his definition corresponding to Def. 2.3) that the meaning of the variable n is already known is untenable for two reasons. First, he objects that the definitions do not tell us what numbers are, and so we have no right to assume the meaning of the variable n to be known, as can be seen from the fact that “we can never ... decide by means of our definitions whether ... Julius Caesar ... is a number or is not” (ibid.). More importantly, he argues that “we cannot by the aid of our suggested definitions prove that, if [there are exactly a F s] and [there are exactly b F s], then necessarily $a = b$ ” (ibid.). I dealt with the first, so-called *Caesar objection* and the second objection in detail elsewhere.⁶

To define addition, first notice that the expression ‘two sets of F s are disjoint’ can be construed as saying that there is a property G such that one set of F s are G s and the other set of F s are not. Then the expression ‘there are $m + n$ F s’ can be defined as ‘there are m F s, there are n F s, and they are disjoint’, or in symbols:

Definition 2.4. $\exists_{m+n}x(Fx)$ ('there are $m + n$ F s') $=_{Df}$ $\exists G(\exists_mx(Fx \wedge Gx) \wedge \exists_ny(Fy \wedge \neg(Gy)))$.

Similarly, the expression ‘there are n disjoint sets of F s’ can be construed as saying that there are a relation R and certain n things such that each of the n things stands in R to an F and no two of them stand in R to one and the same F . Then the expression ‘there are $m \times n$ F s’ can be defined as ‘there are n disjoint sets of m F s’, or in symbols:

⁶ The first objection is the subject of Sect. 2, and the second objection the subject of Sect. 3, of Kim 2013.

Definition 2.5. $\exists_{m \times n} x(Fx)$ ('there are $m \times n$ F s') $=_{Df}$ $\exists R \exists_n y \exists_m x (Fx \wedge Ryx \wedge \forall z (Rzx \rightarrow z = y))$.

Again, the defined terms in Def. 2.4 and Def. 2.5 are the symbols '+' and '×', respectively, and the meaning of all the other expressions including the variables m and n is assumed to be already known. So the same Fregean worries as about Def. 2.3 can also be raised about Def. 2.4 and Def. 2.5. Yet they can be handled in a similar fashion as in the case of Def. 2.3.

As said at the beginning of this section, in order to justify quantifying into the position of the ' n ' in 'there are n F s', and thus validate the use of number words as denoting expressions, it needs to be shown that a genuine relation of identity holds between any two numbers m and n when they appear in the contexts 'there are m F s' and 'there are n F s'. Considering that on the adverbial approach taken here, 'there are n F s' is construed as a colloquial equivalent of ' F s exists n -wise', the following criterion of numerical identity suggests itself: m is to be recognized as the same number as n if and only if, for any property F , if F s exist m -wise, then they must also exist n -wise, and vice versa. The modal force of the 'must' here is that of logical necessity, for, as seen above, individual numbers can be defined in purely logical terms in the context of ' F s exist n -wise'. That is, m is the same number as n if and only if, for any property F , there being m F s logically implies there being n F s, and vice versa. Thus, the criterion of numerical identity can be formulated in terms of the strict connective ' $\Leftrightarrow$ ' as follows:

Definition 2.6. $m \underset{N}{=} n$ (' m is the same number as n ') $=_{Df}$ $\forall F (\exists_m x(Fx) \Leftrightarrow \exists_n x(Fx))$.

Here the defined term is the sign ' $\underset{N}{=}$ ' for the *being the same number as* relation, or more simply, *equality*.⁷ The reason that the simple 'equals' sign is not used is in order to avoid confusion with the sign '=' which is already taken over by the relation of identity in Def. 1.1. However, equality, thus understood, is indeed an identity relation for numbers. This can be seen from, first, the fact that n is the same number as itself since, for any property F , F s exist n -wise $\Leftrightarrow F$ s exist n -wise (reflexivity of identity), and secondly, the fact that if m is the same number as n , then they can be substituted for one another without loss of truth in all contexts

⁷ This 'sort-specific' conception of criteria of identity, which has been advocated for instance by Wiggins (2001, Ch. 2), departs from the usual conception of criteria of identity as involving the simple relation of identity. Which is the right conception, if there is one, is an issue that goes beyond the scope of this paper, and will be treated elsewhere.

introduced by Def. 2.3–Def. 2.9 (substitutivity of identity).⁸ Thus, from now on, the identity sign ‘=’ will be used instead of ‘ $\stackrel{N}{=}$ ’.

It is in Def. 2.6, more than anywhere else, that ALA parts ways from those views which take number words to be quantifiers or higher-level predicates⁹ and those views which take number words to “help form signs for [higher-level entities] and yet not be signs in their own right” (Frege 1979, 257).¹⁰ Unlike the former, which construe the numeral ‘ n ’ as a quantifier that primarily occurs in the context of ‘ n things are F s’, or in symbols, ‘ $\mathbf{N}x(Fx)$ ’, ALA construes it merely as an element of the higher-level predicate ‘ $\exists_n$ ’. On the latter, ‘ n ’ itself is not a denoting expression, and merely helps to form the higher-level predicate ‘ $\exists_n$ ’ which is supposed to denote only as a whole. But in ALA, the ‘ n ’ in the numerical quantifier ‘ $\exists_n$ ’ is viewed as functioning as a genuine term in its own right, referring to the number n . And it is Def. 2.6 that provides a justification for the view. For it shows that any two numbers m and n stand in a genuine relation of identity when they appear in the contexts ‘there are m F s’ and ‘there are n F s’, and so it should be possible to refer to a single determinate number by using a number word ‘ n ’ in the context ‘there are n F s’. Consequently, Def. 2.6 enables us to quantify into the ‘ n ’ position; indeed, Def. 2.6 itself can be turned into: $\forall m \forall n (m = n \leftrightarrow \forall F (\exists_m x (Fx) \leftrightarrow \exists_n x (Fx)))$.

Note that the following definition of numerical identity in terms of material equivalence is inadequate:

$$(1) \quad m = n =_{Df} \forall F (\exists_m x (Fx) \leftrightarrow \exists_n x (Fx)).$$

(1) would be false without an axiom of infinity which says that for any natural number n , there is a property F such that there are n F s. For, without the axiom, there will be two different, sufficiently large numbers m and n such that for any property F , there are neither m F s nor n F s, and so, trivially, there are m F s if and only if there are n F s, that is, $m = n$.

As a better alternative, David Bostock (1974, 16) considers the following modalized version of (1):

$$(2) \quad m = n =_{Df} \Box \forall F (\exists_m x (Fx) \leftrightarrow \exists_n x (Fx)).$$

⁸ For illustration, take Def. 2.3. Suppose that there are n' F s, and $m \stackrel{N}{=} n$. By 2.3, $\exists_1 y (Fy \wedge \exists_n x (Fx \wedge y \neq x))$. Call the y y_1 . Then, $Fy_1 \wedge \exists_n x (Fx \wedge y_1 \neq x)$. Since $m \stackrel{N}{=} n$, that is, $\forall F (\exists_m x (Fx) \leftrightarrow \exists_n x (Fx))$, it follows that $Fy_1 \wedge \exists_m x (Fx \wedge y_1 \neq x)$. Therefore, $\exists_1 y (Fy \wedge \exists_m x (Fx \wedge y \neq x))$, that is, there are m' F s.

⁹ See, for instance, Carnap 1931 and Dummett 1991, Chs. 9 and 11.

¹⁰ See also Bostock 1974, Hodes 1984, and Rayo 2002 for details of the latter view.

But (2) would be false without a modal axiom of infinity which says that for any natural number n , possibly, there is a property F such that there are n F s. For, without such an axiom, there will be two sufficiently large and distinct numbers m and n such that necessarily, for any property F , there are m F s if and only if there are n F s, and thus, $m = n$. Bostock defends (2) by saying that unlike the simple axiom of infinity, its modal version at least “has the advantage of being certainly true” (ibid., 17). Still, he admits that “It seems to [him] doubtful that we could justify the new axiom from a strictly logicist point of view” (ibid.).

Considering how each number can be defined in purely logical terms, it would seem that identity between numbers must be a matter of logic and should not be affected by the size of the universe, actual or possible. Def. 2.6 captures that intuition. Thus, suppose that it is impossible for there to be more than one object. Then according to (1) and (2), ‘ $2 = 3$ ’ would come out true. However, according to Def. 2.6, it would be false. To see this, note first the fact that it is logically true—in classical logic—that there is (at least) one object. If we call it x_1 , then $x_1 = x_1$, and hence $\exists_1 x(x = x_1)$. Now, suppose for *reductio* that $2 = 3$, that is, $1' = 2'$. By a result in the next section (Lemma 3.20), it follows that $1 = 2$, and hence, $\forall F(\exists_1 x(Fx) \Rightarrow \exists_2 x(Fx))$. Let Fx be $x = x_1$. Then, $\exists_1 x(x = x_1) \Rightarrow \exists_2 x(x = x_1)$. Since the consequent is false, and $\vdash (A \Rightarrow B)$ iff $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A)$, it would follow that the antecedent is false, too, which is a contradiction. Parallel reasoning can be applied to any two distinct numbers m and n greater than 1 to show that $m \neq n$. Since, as will be shown later, no extra-logical axiom of infinity of any kind is necessary to establish Lemma 3.20, this establishes the logical nature of the non-identity of any two distinct numbers.

Other numerical relations than numerical identity can also be defined in terms of the context ‘ F s exist n -wise’. The adverbial conception of numbers intuitively suggests that ‘ $m > n$ ’ means ‘for any F , if F s exist m -wise, then they must also exist n -wise, though not vice versa’. Or in symbols:

Definition 2.7. $m > n =_{Df} (\forall F(\exists_m x(Fx) \Rightarrow \exists_n x(Fx)) \wedge \exists F(\exists_n x(Fx) \not\Rightarrow \exists_m x(Fx)))$.

The *less than* relation is the inverse of the *greater than* relation: $m < n$ if and only if $n > m$.

And ‘ $m \geq n$ ’ can be defined in terms of ‘ $=$ ’ and ‘ $>$ ’:

Definition 2.8. $m \geq n =_{Df} (m > n \vee m = n)$.

The *less than or equal to* relation is the inverse of the *greater than or equal to* relation: $m \leq n$ if and only if $n \geq m$.

The transitivity of logical equivalence implies that numerical identity is transitive. To see that the *greater than* relation is transitive, suppose for *reductio* that $m > l$, $l > n$, and yet $m \not> n$. By Def. 3.7, $\exists F(\exists_m x(Fx) \not\Rightarrow \exists_n x(Fx))$ or $\forall F(\exists_m x(Fx) \Rightarrow \exists_n x(Fx))$. But since $m > l$ and $l > n$, and logical implication is transitive, it follows that $\forall F(\exists_m x(Fx) \Rightarrow \exists_n x(Fx))$. So the first disjunct is false. The second disjunct must also be false. For otherwise it would follow by Def. 2.6 that $m = n$, and hence, $l > m$, which implies that $\forall F(\exists_l x(Fx) \Rightarrow \exists_m x(Fx))$. This contradicts the assumption that $m > l$. From the transitivity of $=$ and $>$, it follows by simple logic that $\geq$ is transitive, too.

Lastly, the concept of a natural number is needed in order to develop arithmetic in ALA. Natural numbers are finite numbers, that is, those which are accessible from 1 through a finite number of application of the successor operation. But to explain what it is to be accessible from 1 through a finite number of application of the successor operation requires the notion of a hereditary property. A numerical property P is hereditary if and only if, for any number n , if n has P , so does n' . Now, to be accessible from 1 through a finite number of application of the successor operation means to have every hereditary property had by 1:

Definition 2.9. Nn (' n is a natural number') $=_{Df} \forall P((P1 \wedge \forall m(Pm \rightarrow Pm')) \rightarrow Pn)$.

The principle of mathematical induction is a natural consequence of Def. 2.9, as will be shown in the next section.

(Although it is impossible to develop a theory of transfinite numbers here in any detail, it will be helpful to the reader to see that the smallest infinite cardinal, $\aleph_0$, can be intuitively defined in terms of the predicate ' N ' as follows:

Definition 2.10. $\exists_{\aleph_0} x(Fx)$ ('there are $\aleph_0$ F s') $=_{Df} \forall n(Nn \rightarrow \exists_n x(Fx)).$

3. The Dedekind-Peano Axioms in ALA

In this final section it will be shown in some detail that the Dedekind-Peano axioms can be derived in ALA solely from the definitions of the basic concepts of arithmetic given above.

The Dedekind-Peano axioms can be formulated as follows:

A1 $N1$;

A2 $\forall n(Nn \rightarrow Nn')$;

A3 $\forall m \forall n((Nm \wedge Nn) \rightarrow (m = n \leftrightarrow m' = n'))$;

A4 $\forall n(Nn \rightarrow \neg(1 = n'))$;

A5 $\forall P((P1 \wedge \forall m(Nm \rightarrow (Pm \rightarrow Pm'))) \rightarrow \forall n(Nn \rightarrow Pn))$.

First, **A1** and **A2** both trivially follow from Def. 2.9:

Lemma 3.1 (A1). $N1$.

Lemma 3.2 (A2). $\forall n(Nn \rightarrow Nn')$.

For the Induction Principle (**A5**), first note that the following proposition is also a trivial consequence of Def. 2.9:

Proposition 3.3. $\forall P((P1 \wedge \forall m(Pm \rightarrow Pm')) \rightarrow \forall n(Nn \rightarrow Pn))$.

Using this fact, **A5** can be proved as follows:

Lemma 3.4 (A5). $\forall P((P1 \wedge \forall m(Nm \rightarrow (Pm \rightarrow Pm'))) \rightarrow \forall n(Nn \rightarrow Pn))$.

Proof. Suppose that $P1$, $\forall m(Nm \rightarrow (Pm \rightarrow Pm'))$, and Nn . It should be shown that Pn . From Prop. 3.3 it follows by $\forall^2 E^{11}$ that $((P1 \wedge N1) \wedge \forall m((Pm \wedge Nm) \rightarrow (Pm' \wedge Nm'))) \rightarrow \forall n(Nn \rightarrow (Pn \wedge Nn))$.¹² So in order to establish that Pn , it suffices to show, first, that $(P1 \wedge N1)$, and secondly, that $\forall m((Pm \wedge Nm) \rightarrow (Pm' \wedge Nm'))$. The first follows from the assumption that $P1$, and Lemma 3.1. For the second, suppose Pm and Nm . Since $\forall m(Nm \rightarrow (Pm \rightarrow Pm'))$, it follows that Pm' . And since Nm , it follows from Lemma 3.2 that Nm' . $\square$

A proof of **A4** requires establishing several preliminary facts.

Proposition 3.5. $\forall m \forall n(m \geq n \leftrightarrow \forall F(\exists_m x(Fx) \Rightarrow \exists_n x(Fx)))$.

¹¹ I.e. the second-order universal quantifier elimination rule.

¹² This idea is due to Frege (1962, Th. 152). Heck (1993, n. 31) presents Frege's proof in modern notation.

Proof. Follows by simple logic from Def. 2.6–Def. 2.8. □

Corollary 3.6. $\forall m \forall n (m = n \leftrightarrow (m \geq n \wedge n \geq m))$

Proof. Follows immediately from Def. 2.6 and Prop. 3.5. □

Corollary 3.7. $\forall m \forall n (m > n \leftrightarrow (m \geq n \wedge n \not\geq m))$

Proof. Follows immediately from Def. 2.7 and Prop. 3.5. □

Proposition 3.8. $\forall n (Nn \rightarrow n \geq 1)$.

Proof. By induction. The base step is trivial. For the induction step, assume that Nn and $n \geq 1$. Since, by Def. 2.3, $n' \geq n$, it follows by the transitivity of $\geq$ that $n' \geq 1$. □

Proposition 3.9. $\forall l \forall m \forall n ((Nl \wedge Nm \wedge Nn) \rightarrow (l \geq m \rightarrow l + n \geq m + n))$.

Proof. Follows by Def. 2.4, Prop. 3.5 and simple logic. □

Corollary 3.10. $\forall l \forall m \forall n ((Nl \wedge Nm \wedge Nn) \rightarrow (l > m \rightarrow l + n > m + n))$.

Proof. Follows by simple logic from Prop. 3.9 and Cor. 3.7. □

Proposition 3.11. $\forall n (Nn \rightarrow n + 1 = n')$.

Proof. By induction. For the base step, suppose $\exists_{1+1}x(Fx)$, that is, $\exists G(\exists_1x(Fx \wedge Gx) \wedge \exists_1y(Fy \wedge \neg(Gy)))$. Call the G G_1 , the x x_1 and the y y_1 . Then $Fx_1 \wedge G_1x_1 \wedge Fy_1 \wedge \neg(G_1y_1)$. By Def. 1.1 and simple logic, $\exists_1y(Fy \wedge \exists_1x(Fx \wedge y \neq x))$, that is, $\exists_{1'}x(Fx)$. Hence, by $\rightarrow I$, $\square I$, $\forall^2 I$ and Prop. 3.5, $1 + 1 \geq 1'$. Conversely, suppose $\exists_{1'}x(Fx)$, that is, $\exists_1y(Fy \wedge \exists_1x(Fx \wedge y \neq x))$. Call the y y_1 , and the x x_1 . Let Gx be $x = x_1$. By simple logic, $\exists G(\exists_1x(Fx \wedge Gx) \wedge \exists_1y(Fy \wedge \neg(Gy)))$, that is, $\exists_{1+1}x(Fx)$. By $\rightarrow I$, $\square I$, $\forall^2 I$ and Prop. 3.5, $1' \geq 1 + 1$. By Cor. 3.6, $1 + 1 = 1'$.

For the induction step, assume that Nn and $n + 1 = n'$. It will be shown first that $n' + 1 = (n + 1)'$. Then, by the induction hypothesis, it will follow that $n' + 1 = (n')'$, which is the desired result.

Thus, suppose $\exists_{n'+1}x(Fx)$, that is, $\exists G(\exists_{n'}x(Fx \wedge Gx) \wedge \exists_1y(Fy \wedge \neg(Gy)))$. If we call the G G_1 and the y y_1 , then $Fy_1 \wedge \neg(G_1y_1) \wedge \exists_{n'}x(Fx \wedge G_1x)$, that is, $Fy_1 \wedge \neg(G_1y_1) \wedge \exists_1z(Fz \wedge G_1z \wedge \exists_nx(Fx \wedge G_1x \wedge z \neq x))$. Call the z z_1 . Since $\neg(G_1y_1)$ and G_1z_1 , it follows by Def. 1.1 and simple logic that $Fz_1 \wedge (\exists_nx(Fx \wedge z_1 \neq$

$x \wedge G_1x) \wedge \exists_1y(Fy \wedge z_1 \neq y \wedge \neg(G_1y))$). By $\exists^2I$ and Def. 2.4, $Fz_1 \wedge (\exists_{n+1}x(Fx \wedge z_1 \neq x))$, and by Def. 2.3, $\exists_{(n+1)'}x(Fx)$. Hence, by $\rightarrow I$, $\Box I$, $\forall^2I$ and Prop. 3.5, $n' + 1 \geq (n + 1)'$.

Conversely, suppose $\exists_{(n+1)'}x(Fx)$, that is, $\exists_1z(Fz \wedge (\exists_{n+1}x(Fx \wedge z \neq x)))$. Call the z z_1 . Then, by Def. 2.4, $Fz_1 \wedge \exists G(\exists_nx(Fx \wedge z_1 \neq x \wedge Gx) \wedge \exists_1y(Fy \wedge z_1 \neq y \wedge \neg(Gy)))$. Call the G G_1 and the y y_1 . Let Hx be $G_1x \vee x = z_1$. Then, $Fz_1 \wedge Hz_1 \wedge (\exists_nx(Fx \wedge z_1 \neq x \wedge Hx) \wedge Fy_1 \wedge \neg(Hy_1))$. So, by Def. 2.3 and simple logic, $\exists_nx(Fx \wedge Hx) \wedge \exists_1y(Fy \wedge \neg(Hy))$. By $\exists^2I$ and Def. 2.4, $\exists_{n'+1}x(Fx)$. By $\rightarrow I$, $\Box I$, $\forall^2I$ and Prop. 3.5, $(n + 1)' \geq n' + 1$. Hence, by Cor. 3.6, $n' + 1 = (n + 1)'$. $\square$

Lemma 3.12 (A4). $\forall n(Nn \rightarrow \neg(1 = n'))$.

Proof. Suppose for *reductio* that $\exists n(Nn \wedge 1 = n')$. Call the n n_1 . By Prop. 3.8, $n_1 \geq 1$. By Prop. 3.9, $n_1 + 1 \geq 1 + 1$. By Prop. 3.11, $n'_1 \geq 1'$. Since $n'_1 = 1$, $1 \geq 1'$, that is, $\forall F(\exists_1x(Fx) \Rightarrow \exists_2x(Fx))$. Since $\exists_1x(x = x)$, call the x x_1 . By $\exists I$, $\exists_1x(x = x_1)$. Now, let Fx be $x = x_1$. By $\forall^2E$, $\exists_1x(x = x_1) \Rightarrow \exists_2x(x = x_1)$. Since the consequent is logically false, it would follow that $\neg(\exists_1x(x = x_1))$, which yields a contradiction. $\square$

For **A3** we need to establish the trichotomy principle for natural numbers. And to that end we need some additional facts.

Proposition 3.13. $\forall m \forall n((Nm \wedge Nn) \rightarrow m + n = n + m)$.

Proof. Suppose Nm and Nn . Suppose $\exists_{m+n}x(Fx)$, that is, $\exists G(\exists_mx(Fx \wedge Gx) \wedge \exists_ny(Fy \wedge \neg(Gy)))$. Call the G G_1 . Let Hx be $\neg(G_1x)$. Then $\exists_ny(Fy \wedge Hy) \wedge \exists_mx(Fx \wedge \neg(Hx))$. By simple logic and Def. 2.4, $\exists_{n+m}x(Fx)$. Hence, by Prop. 3.5, $m + n \geq n + m$. Likewise for the other direction. $\square$

Proposition 3.14. $\forall l \forall m \forall n((Nl \wedge Nm \wedge Nn) \rightarrow (l + m) + n = l + (m + n))$.

Proof. Suppose Nl , Nm and Nn . Suppose $\exists_{(l+m)+n}x(Fx)$. By Def. 2.4 and $\exists^2E$, $(\exists_lx(Fx \wedge G_1x \wedge H_1x) \wedge \exists_my(Fy \wedge G_1y \wedge \neg(H_1y))) \wedge \exists_nz(Fz \wedge \neg(G_1z))$. Let G_2x and H_2x be $G_1x \wedge H_1x$ and $G_1x \wedge \neg(H_1x)$, respectively. Then $\exists_lx(Fx \wedge G_2x) \wedge (\exists_my(Fy \wedge \neg(G_2y) \wedge H_2y) \wedge \exists_nz(Fz \wedge \neg(G_2z) \wedge \neg(H_2z)))$. By $\exists^2I$ and Def. 2.4, $\exists_{l+(m+n)}x(Fx)$. Similarly for the other direction. $\square$

Proposition 3.15. $\forall n(Nn \rightarrow n' > n)$.

Proof. By induction. The base step is trivial. For the induction step, assume that Nn and $n' > n$. By Cor. 3.10, $n' + 1 > n + 1$. Since, by Lemma 2, Nn' , it follows by Prop. 3.11 that $(n')' > n'$, which is the desired result. $\square$

Proposition 3.16. $\forall n(Nn \rightarrow (n = 1 \vee \exists m(Nm \wedge n = m')))$

Proof. By induction. The base step is trivial. For the induction step, assume that Nn and $n = 1 \vee \exists m(Nm \wedge n = m')$. It will be argued by cases that $\exists m(Nm \wedge n' = m')$. First, suppose $n = 1$. Then $n' = 1'$. Since $N1$ (A1), $\exists m(Nm \wedge n' = m')$. Secondly, suppose $\exists m(Nm \wedge n = m')$. Call the m m_1 . Then $n' = (m'_1)'$. Since Nm_1 , it follows by A2 that Nm'_1 . Hence, $\exists m(Nm \wedge n' = m')$, namely m'_1 . $\square$

Proposition 3.17. $\forall m \forall n((Nm \wedge Nn) \rightarrow (m > n \rightarrow \exists l(Nl \wedge m = n + l)))$.

Proof. Suppose Nm . It will be shown by induction that $\forall n(Nn \rightarrow (m > n \rightarrow \exists l(Nl \wedge m = n + l)))$. For the base step, suppose $m > 1$. Then $m \neq 1$. Since Nm , it follows by Prop. 3.16 that $\exists l(Nl \wedge m = l')$. By Prop. 3.11, $\exists l(Nl \wedge m = l + 1)$. By Prop. 3.13, $\exists l(Nl \wedge m = 1 + l)$.

For the induction step, suppose that Nn and $m > n \rightarrow \exists l(Nl \wedge m = n + l)$. It needs to be shown that $m > n' \rightarrow \exists l(Nl \wedge m = n' + l)$. Suppose $m > n'$. Since $n' > n$ (Prop. 3.15), it follows by the transitivity of $>$ that $m > n$. Then, by the induction hypothesis, $\exists l(Nl \wedge m = n + l)$. Call the l l_1 . Since Nl_1 , it follows from Prop. 3.16 that $l_1 = 1$ or $\exists l(Nl \wedge l_1 = l')$. But if $l_1 = 1$, then since $m = n + l_1$, $m = n'$, which would contradict the supposition that $m > n'$. Hence, $\exists l(Nl \wedge l_1 = l')$. Call the l l_2 . Then, $m = n + l_1 = n + l'_2 = n + (l_2 + 1)$ (Prop. 3.11) $= n + (1 + l_2)$ (Prop. 3.13) $= (n + 1) + l_2$ (Prop. 3.14) $= n' + l_2$ (Prop. 3.11). Hence, $\exists l(Nl \wedge m = n' + l)$. $\square$

Proposition 3.18. $\forall m \forall n((Nm \wedge Nn) \rightarrow (m > n \rightarrow (m \geq n')))$.

Proof. Suppose Nm, Nn , and $m > n$. By Prop. 3.17, $\exists l(Nl \wedge m = n + l)$. Call the l l_1 . By Prop. 3.8, $l_1 \geq 1$, that is, $l_1 > 1$ or $l_1 = 1$. If $l_1 > 1$, then by Cor. 3.10, $l_1 + n > 1 + n$. Since $m = n + l_1 = l_1 + n$ and $1 + n = n + 1 = n'$, it follows that $m > n'$. If $l_1 = 1$, then $m = n + 1 = n'$. Hence, $m > n'$ or $m = n'$, that is, $m \geq n'$. $\square$

Now we can establish trichotomy for natural numbers:

Proposition 3.19 (Trichotomy_N). $\forall m \forall n((Nm \wedge Nn) \rightarrow (m > n \vee m = n \vee n > m))$.

Proof. By induction on m . The base step directly follows from Prop. 3.8. For the induction step, assume that Nm and $\forall n(Nn \rightarrow (m > n \vee m = n \vee n > m))$. It needs to be shown that $\forall n(Nn \rightarrow (m' > n \vee m' = n \vee n > m'))$. Suppose Nn . By the induction hypothesis, $m > n$ or $m = n$ or $n > m$. Suppose $m > n$. Since $m' > m$ (Prop. 3.15), it follows that $m' > n$. Next, suppose $m = n$. Since $m' > m$, it follows that $m' > n$. Lastly, suppose $n > m$. Then, by Prop. 3.18, $n > m'$ or $n = m'$. $\square$

Lemma 3.20 (A3). $\forall m \forall n ((Nm \wedge Nn) \rightarrow (m = n \leftrightarrow m' = n'))$.

Proof. Suppose Nm and Nn . The left-to-right direction of the biconditional is trivial. For the right-to-left direction, suppose for *reductio* that $m' = n'$ and yet $m \neq n$. By trichotomy (Prop. 3.19), $m > n$ or $n > m$. Suppose $m > n$. Then $m + 1 > n + 1$ (Cor. 3.10), and hence $m' > n'$ (Prop. 3.11). But since $m' = n'$, it follows that $n' > n'$, which is a contradiction (Def. 2.7). So $m \not> n$. Parallel reasoning shows that $n \not> m$. $\square$

The five lemmas established above combine to yield the main theorem of this section:

Theorem 3.21. $\vdash A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4 \wedge A5$.

Proof. Follows immediately from Lemmas 1, 2, 20, 12 and 4. $\square$

In light of the fact that Definitions 2.1–2.9 define the basic concepts of arithmetic in purely logical terms, and the fact that Th. 3.21 has been established in ALA solely from those definitions, we may conclude that the Dedekind-Peano axioms of arithmetic are in fact truths of logic. Since every truth of arithmetic is a second-order consequence of the axioms, it would seem that the result vindicates arithmetical logicism—that arithmetical truths are in fact logical truths—provided that second-order consequence preserves logical truth.

References

- Bernacerraf, P. and H. Putnam (eds.): 1983, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, ed. P. Bernacerraf and H. Putnam. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition.
- Boolos, G.: 1998, *Logic, Logic and Logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bostock, D.: 1974, *Logic and Arithmetic: Natural Numbers*. Oxford: Oxford University Press.

- Carnap, R.: 1931, 'The Logicist Foundations of Mathematics'. In (Bernacerraf and Putnam, 1983), pp. 14–52.
- Dummett, M.: 1991, *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Enderton, H. B.: 2001, *A Mathematical Introduction to Logic*. San Diego, CA: Harcourt/Academic Press, 2nd edition.
- Frege, G.: 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*, trans. J. L. Austin as *The Foundations of Arithmetic*. Oxford: Blackwell. 2nd. rev. ed., 1980.
- Frege, G.: 1962, *Grundgesetze der Arithmetik, I/II*. Hildesheim: Georg Olms.
- Frege, G.: 1979, *Posthumous Writings*, ed. H. Hermes, F. Kambartel and F. Kaulbach. Chicago: University of Chicago Press.
- Gupta, A.: 2012, 'Definitions'. In: E. N. Zalta (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2012 edition.
- Heck, R.: 1993, 'The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*'. *Journal of Symbolic Logic* **58**(2), 579–600.
- Hodes, H.: 1984, 'Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic'. *Journal of Philosophy* **81**, 123–49.
- Kim, J.: 2013, 'What Are Numbers?'. *Synthese* **190**(6), 1099–1112.
- Prawitz, D.: 1965, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Rayo, A.: 2002, 'Frege's Unofficial Arithmetic'. *Journal of Symbolic Logic* **67**(4), 1623–1638.
- Shapiro, S.: 1991, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Wiggins, D.: 2001, *Sameness and Substance Renewed*. Cambridge: Cambridge University Press.

발 표 2:

“고차 모호성과 분명한 경계”

발표자: 이진희 선생님(아주대)

1. 문제 제기 및 전략

필자는 이 글에서 고차 모호성의 역설 및 관련된 문제들에 대한 해결전략으로 극단적 결정 불가능성을 제시하고자 한다. 이러한 전략을 제시하는 이유는, 고차 모호성의 역설은 모호성(더미의 역설과 관련된 모호성)을 분류적 불완전함으로 잘못 이해한것에서 기인한다고 필자는 생각하기 때문이다. 이점은 고차 모호성의 역설들이 모두 분명한 경계사례를 전제하며 이러한 분명한 경계사례는 분류적 개념을 통해 이해된다는 점을 통해 확인할 수 있다. 그래서 필자는, 모호성에 대한 기본적 직관인 관용(tolerance)과 강건성(robustness)에 기초하면서 분류적이지 않은 극단적 결정불가능성을 제안할 것이며, 이러한 극단적 결정불가능성이 모호성에 대한 우리의 직관에 보다 부합할 뿐 아니라, 이에 근거해서 고차 모호성의 문제를 해결할 수 있음을 보일 것이다.

이러한 필자의 논의는 다음과 같은 특징을 갖는다. 우선 극단적 결정불가능성에 대한 자연스러운 이해가 인식적 이해라고 할지라도, 의미론적 이해의 가능성을 열어두고 논의를 진행하고자 한다. 또한 극단적 결정불가능성과 그것에 기초한 설명 모형은 밥자인(Bobzien)의 ‘절대적 불가지론’에 상당부분 의존한다. 그러나 극단적 결정불가능성이 반드시 인식론적으로 이해될 필요는 없다는 점 그리고 그녀를 포함한 대부분의 학자들과는 달리 모호성을 분명함(D)이 아니라 인식적/의미론적 결정불가능성(I)에 기초해서 설명한다는 측면에서, 필자의 논의는 밥자인이나 라이트(Wright) 등의 불가지론적 논의와 구분된다.

물론 고차 모호성의 역설을 제기하는 대부분의 학자들 역시 분명한 경계영역을 포함하는 분류적 정의 및 그와 유사한 모호성에 대한 정의에서 문제의 기원을 찾는 것 역시 사실이다. 그러나 그들은 대부분 고차 모호성 자체가 이러한 분류적 정의의 귀결이라고 생각하면서 고차 모호성의 문제에 접근한다는 점에서, 고차 모호성을 인정하면서 분류적 정의를 부정하는 필자의 전략과 구분된다. 그리고 이 글에서 논의하는 모호성은 더미의 역설과 관련된 모호성으로 제한된다. 필자의 주요 논의는 아래와 같다.

- a) 고차 모호성은 모호성의 중요한 특징인 관용과 강건성의 자연스러운 귀결이다.
- b) 고차 모호성의 역설은 분명한 경계영역을 가정해야 성립한다.
- c) 분명한 경계영역은 모호성에 대한 이해들 중 분류적 이해에서만 성립한다. 따라서 고차 모호성의 역설을 해결하는 가장 효과적인 방법은 분류적이지 않은 모호성에 대한 설명 모형을 제시하는 것이다.
- d) 분류적 모형은 고차 모호성의 역설을 야기할 뿐 아니라, 분명한 경계영역을 전제하는 모호성에 대한 잘못된 이해이다.

e) 관용과 강건성을 만족시키면서 분명한 경계사례(DBa)를 인정하지 않는 경계영역은 Pa 인지 $\sim$ Pa인지 결정할 수 없는 영역이 아니라, Pa임을 결정할 수 없을 뿐 아니라 $\sim$ Pa 역시 결정할 수 없는 영역이다. 따라서 경계영역을 정의하기 위해서는 ‘분명함’(D)이 아니라 (인식적/의미론적) ‘결정 불가능’(I)이 도입되어야 한다. 그래서 a가 P의 경계사례임은 IPa로 표현될 수 있으며, 이러한 IPa란 a가 P인지 ($\sim$ P인지)를 결정할 수 없음 즉 Pa와 관련된 어떤 결정이나 판단을 내릴 수 없음을 의미한다. 그리고 이것이 필자가 말하는 극단적 결정불가능성이다. ‘극단적’이라는 용어가 사용된 이유는 이러한 결정불가능성이 f)를 함의하기 때문이다.

f) 이차 경계사례 IIPa는 IPa인지 $\sim$ IPa인지를 결정할 수 없음을 의미한다. 앞에서 확인했듯이, IPa는 a가 P인지 $\sim$ P 인지를 결정할 수 없다는 것으로 이것은 곧 Pa에 대한 아무런 결정을 할 수 없음을 의미한다. 그래서 IIPa는 IPa와는 다른 외연을 갖는 것이 아니라 Pa의 결정불가능성을 결정할 수 없음을 의미한다. 따라서 고차 모호성 I^n Pa는 결국 Pa에 대한 결정불가능성이 제거될 수 없음을 의미한다. 그리고 이 경우 II-법칙(IPa $\rightarrow$ I^n Pa)이 성립한다.

7. 극단적 결정불가능성에 기초할 경우, 고차 모호성의 역설은 발생하지 않으며 다른 결정불가능한 진술과 모호성의 차이가 분명하게 드러난다.

2. 고차 모호성의 역설은 분명한 경계영역을 전제한다.¹⁾

고차 모호성의 역설은 라이트(Wright), 자르디니(Zardini), 파라(Fara), 세인스베리(Sainsbury), 라프만(Raffman) 등에 의해 제시되었다.²⁾ 이러한 고차 모호성의 역설은 크게 라이트, 자르디니, 파라 등이 제시한 형식적 증명과 세인스베리, 라프만 등이 제시한 비형식적, 직관적 증명으로 구분할 수 있다.

이 글에서는 주로 고차 모호성의 문제를 비형식적으로 지적한 세인스베리와 라프만의 논의에 기초하고자 한다. 고차모호성의 역설과 관련된 문제는 논리적, 기술적 문제뿐 아니라 모호성에 대한 기본적 이해와 밀접하게 연관되어 있으며, 이러한 모호성 및 고차 모호성에 대한 논의에는 세인스베리와 라프만이 제시한 직관적 비판이 보다 효과적이기 때문이다. 세인스베리와 라프만이 제시한 고차 모호성의 문제는 크게 보아 아래 두 요소로 구성된다.³⁾

-
- 1) 불필요한 오해를 피하기 위해, 경계영역은 경계사례를 갖는 영역으로 정의한다. 즉 사례가 없는 경계영역은 존재하지 않는다.
 - 2) Wright(1992, 2011), Zardini(2013), Fara(2003), Sainsbury(1991), Raffman(2011), 사피로(Sapiro) 역시 고차 모호성과 관련된 중요한 논의를 제시하였지만, 논의의 범위를 제한하기 위해 그의 논의를 제외하였다. 그러나 그가 제시한 고차 모호성의 문제 역시 분명한 경계영역을 전제한다. Sapiro(2006) 참조.
 - 3) 논의의 편의를 위해, 앞으로의 논의에서는 고차 모호성의 역설과 이러한 역설의 발생과 관련된 고차 모호성의 문제를 모두 ‘고차 모호성의 역설’이라는 용어로 표현할 것이다.

a) 고차 모호성이 존재한다는 것은, $P(\sim P)$ 인 영역과 P 의 경계영역(BP)인 일차 모호성뿐 아니라 $DP(\sim DP)$ 와 BP 사이의 경계영역인 이차 모호성이 존재하며, 그러한 과정은 끊임없이 반복된다는 것이다. 그런데 이러한 과정이 지속된다면 우리는 결국 분명한 경계영역을 가질 뿐 아니라 유한한 대상들에 대해 무한히 많은 경계영역을 설정하는 (n 개의 대상으로 이루어진 더미의 열에 n 보다 많은 영역을 설정하는) 모순된 결과를 초래한다.⁴⁾

b) 모호한 용어는 경계사례뿐 아니라 분명한 사례 역시 갖는다. 따라서 $P(\sim P)$ 와 BP의 경계영역이 존재한다는 것은 분명한 경계영역 즉 DBP가 존재함을 함의한다. 그런데 이러한 분명한 경계영역의 존재는 경계가 흐릿함으로 이해되는 모호성의 직관적 의미와 부합하지 않는다.⁵⁾

그런데 a)와 b)에서 세인스베리와 라프만이 전제하는 고차 모호성은 위계적 구조 갖는 것으로 모호성에 대한 분류적 이해에 기초하는 것이다.⁶⁾ 이러한 고차 모호성의 위계적 구조는 아래와 같이 표현될 수 있다.⁷⁾

	$\rightarrow$ dimension $D \rightarrow$									
대상:	$a_1, a_2,$									a_n
level 1:		DP			BP				$D \sim P$	
level 2:		D^2P		B^2P		DBP		B^2P		$D^2 \sim P$
level 3:		D^3P	B^3P	DB^2P	DB^3P	D^3BP	B^3P	DB^2P	B^3P	$D^3 \sim P$
level n:	D^nP	B^nP	$DB^{n-1}P$	...	B^nP	$D^{n-1}BP$	...	$DB^{n-1}P$	B^nP	$D^n \sim P$

4) Sainsbury(1991), 참조.

5) Raffman(2011), 참조.

6) 라이트, 자르디니, 파라 등이 제시한 고차 모호성의 역설 역시 이러한 분류적 이해를 전제한다. 이점은 그들이 모두 D-도입($P \vdash DP$)을 수용하고 있을 뿐 아니라, 라이트와 자르디니가 자신들의 역설을 구성하기 위해 도입하는 ‘절대적 경계영역’을 통해 확인할 수 있다. D-도입은 P이면서 BP일 수 없다는 것을 함축하는데, 이것은 BP를 P 혹은 DP와 구분되는 제 3의 영역으로 인정하는 그래서 DBP를 인정하는 것이다. 이점은 ‘절대적 경계영역’을 통해 더욱 분명하게 드러난다. 더구나 이러한 ‘D-도입’이나 ‘절대적 경계영역’을 제외하고도 그들의 논의는 명시적, 암묵적으로 DB를 전제하는 분류적 개념에 자주 의존한다. 이 점은 밥자인의 글을 참고할 수 있다. Bobzien(2010, 2013)참조.

7) 위의 표에서 B^nP 는 일반적인 관행에 따라 ‘ $\sim D^nP \wedge \sim D \sim D^{n-1}P$ ’로 정의된다. 그리고 BP를 DP와 $D \sim P$ 사이의 경계영역으로 이해할지 아니면 P와 $\sim P$ 사이의 경계영역으로 이해할지에 따라서, 위의 그림은 달리질 수 있다. 그리고 이것은 고차 모호성의 정의에도 그대로 이어진다. 즉 고차 모호성을 P와 $DB^{n-1}P$ 사이의 경계영역으로 이해할 수 있으며 D^nP 와 $DB^{n-1}P$ 사이의 경계영역으로 이해할 수도 있다. 또한 명시적으로 DB를 주장하지 않을 경우, 고차 모호성은 P 혹은 DP와 B^nP 사이의 경계영역으로 정의된다. 그러나 일반적으로 이 두 정의를 특별한 구분 없이 사용하기 때문에 고차 모호성을 소개하는 지금의 논의에서는 특별한 구분 없이 사용하였다. 앞으로의 논의에서도 별도의 언급이 없는 한 이 두 정의를 모두 사용할 것이다. 이 글을 통해 필자는 위와 같은 구분 모두를 비판하면서 새로운 모호성 및 고차 모호성에 대한 정의를 제시할 것이기 때문이다. 그리고 위의 표는 밥자인의 것을 인용한 것이다. Bobzien(2013), p.4.

위의 그림에서 나타나듯, 위계적 모형에서의 고차 모호성은 선행하는 level에서 포착하지 못한 숨겨진 영역을 새로운 경계영역을 도입하여 포착하고 재분류하는 것이다. 그래서 위계적 모형은 모호성을 분류적 불완전성으로 이해하는 것이다. 즉 각 level에서의 식들이 대상들을 완전하게 포괄하지 못하기 때문에 고차 모호성이 계속 발생한다는 것이다. 다시 말해, level 1에서 대상들을 세 영역으로 분류하고 level 2에서는 대상들을 다섯 영역으로 구분하는 것은 level 1의 분류가 불충분함을 전제한다는 것이다. 그래서 level n에서 우리는 2^n 개의 경계점과 2^{n+1} 개의 영역을 갖는다. 이점은 분류적 불완전성의 특징을 통해서도 이해할 수 있다. 경계영역의 경계영역을 도입한 이유가 분명한 영역과 경계영역 사이의 경계영역이 존재하기 때문이라면, 위와 같은 위계적 구조는 자연스럽게 도출되기 때문이다. 이러한 분류적 이해에 기초한 위계적 고차 모호성의 주목할 만한 특징을 정리하면 다음과 같다.⁸⁾

i) 모호성은 $D\Phi$ 와 $D\sim\Phi$ 이 사이에 존재하는 제 3의 영역이다. 다시 말해, 경계영역은 분명한 영역과 구분되는 제 3의 영역이다.

ii) 선행하는 level의 경계영역은 다음 level에서 분명한 영역이 된다. 따라서 위계적 고차 모호성은 분명한 경계사례의 존재를 함축한다.

iii) 경계사례들은 균질적이지 않다. 경계영역의 대상들은 분명한 영역과의 거리만큼의 분명함 혹은 분명하지 않음의 특징을 갖는다. 이점은 level 1에서 BP인 a_m 과 a_n 이 level 2에서는 B^2Pa_n 과 $DBPa_m$ 이 될 수 있다는 것과 가운데 있는 대상은 $n-1$ 번 분명하게 경계영인 반면 그 대상의 오른쪽과 왼쪽의 대상은 이러한 분명함을 갖지 못한다는 것을 통해 확인할 수 있다.

3. 완충적 관점과 제거불가능성

고차 모호성의 역설에 대한 가장 자연스러운 대응전략은 고차 모호성을 제거하거나 적어도 약화하는 것이다.⁹⁾ 그러나 고차 모호성은 경계자체가 흐릿함으로 대표되는 모호성에 대한 직관적 이해의 자연스러운 귀결일 뿐 아니라, 고차 모호성의 역설을 피하기 위해 그것을 제거할 필요는 없다.

3-1) 고차 모호성은 모호성의 자연스러운 귀결이다.

고차 모호성은 모호성에 대한 표준적 정의 및 직관적 이해의 자연스러운 귀결이다. 모호성 특히 더미의 역설과 관련된 모호성에 대한 기본적 직관은 아래와 같다.

8) 고차 모호성의 일반적 특징에 대해서는 별도로 언급하지 않았다. 이점은 뒤에서 다시 논의될 것이다.

9) 고차 모호성을 약화하는 것은 특정 순서(일반적으로 이차 모호성)까지의 모호성만을 인정하는 것이다.

관용(tolerance): 더미의 역설을 구성하는 대상들의 나열에 대해서, 대상들의 차이가 너무 작아서 하나의 대상에는 P를 적용하면서 인접한 대상에는 P를 적용하지 않을 수 없다.¹⁰⁾

강건성(robustness): 모호한 술어 P의 경계영역이 존재할 뿐 아니라 그러한 경계영역의 경계가 분명하지 않다.¹¹⁾

이 두 직관으로부터 우리는 경계영역이 흐릿해서 그것의 경계를 확정할 수 없다는 것과 경계영역의 경계영역이 존재함 즉 고차 모호성의 존재를 추론할 수 있다.¹²⁾ 경계영역의 경계가 흐릿하다면 그러한 경계영역의 경계영역의 경계 역시 흐릿하다고 할 수 있으며, 이 과정이 끊임없이 반복된다고 할 수 있기 때문이다. 그래서 고차 모호성은 모호성에 대한 기본적인 직관에 근거하는 것으로, 고차 모호성의 역설 및 그것과 관련된 문제는 모호성에 대한 이해와 밀접하게 연관되어 있다. 따라서 고차 모호성의 역설은 단순히 고차 모호성의 존재를 부정해서 해결할 수 없는 문제이다. 고차 모호성의 문제를 해결하기 위해서는 그것이 근거하는 위의 두 직관에 의해 대표되는 모호성에 대한 정의 자체를 수정하거나 보완해야 한다.

3-2) 고차 모호성은 두 개 이상의 의미를 갖는 불분명한 용어이다.

고차 모호성의 역설은 우리에게 쉽지 않은 선택을 강요한다. 왜냐하면 고차 모호성의 역설은 고차 모호성의 존재뿐 아니라 그것이 근거하는 직관에 대한 수정을 요구하는데 그 직관들은 포기하기 어려운 명백한 직관이기 때문이다. 그러나 관용과 강건성이 반드시 위계적 구조를 갖는 고차 모호성을 함의하는 것은 아니다. 이점은 관용과 강건성으로부터 위계적 구조를 함의하는 ‘완충적 관점’(buffering view)뿐 아니라 이러한 비판으로부터 자유로울 수 있는 ‘제거불가능성’이라는 고차 모호성과 관련된 개념이 도출될 수 있음을 통해 확인할 수 있다.

완충적 관점: 모호한 술어의 경우, P와 BP가 존재할 뿐 아니라 P와 BP 사이의 경계영역이 존재하며 그 과정은 끊임없이 반복된다. 즉 P와 BⁿP 사이의 경계영역이 항상 존재한다.¹³⁾

10) 관용 혹은 관용의 법칙은 일반적으로 ‘ $P_{a_n} \rightarrow P_{a_{n+1}}$ ’로 정식화되지만, 이보다 약한 ‘ $D^n P_{a_n} \rightarrow \sim D \sim D^{n-1} P_{a_{n+1}}$ ’로 정식화되기도 한다.

11) 위의 두 직관을 라이트는 ‘이음매 없음의 직관’(seamlessness intuition)과 ‘근절할 수 없는 직관’(ineradicability intuition)이라고 부르기도 한다. 이음매 없음의 직관은 관용에 대한 것이며 근절할 수 없는 직관은 강건성에 대한 것이다. Wright(2011), pp.523-527.

12) 물론 위에서 말하는 ‘추론’은 엄격한 의미의 논리적 추론은 아니다.

13) ‘완충적 관점’이라는 용어는 라이트가 사용한 것이다. 그런데 앞에서 제시한 위계적 모형에서는 고차 모호성을 $D^n P$ 와 $B^n P$ (혹은 $DB^{n-1}P$) 사이의 경계영역으로 정의하는 반면, 완충적 관점에서는 고차 모호성을 P와 $B^n P$ 사이의 경계영역으로 정의하고 있다. 이것은 각주 7)에서 말한 것처럼 경계영역에 대한 이해의 차이에서 비롯된 것이다. 그러나 이 글의 주요 논의는 분명한 BP를 제 3의 영역으로 설정하는 것 즉 DBP와 관련된 것이기 때문에 이러한 차이는 그리 중요하지 않다. 다만, 이글의 마지막에서 필자는 라이트와 유사하면서 DBP를 전

제거불가능성: 모호성은 제거되지 않는다. 특히 D와 같은 연산자의 도입에 의해 진술의 의미는 달라지지만 모호성 자체는 제거되지 않는다.¹⁴⁾

위의 정의에서 확인할 수 있듯이, 완충적 관점은 분명한 경계영역(DB)의 존재를 전제하는 것인 반면 제거불가능성은 DB를 전제하지 않는다. 이러한 완충적 관점 및 제거불가능성과 관용 및 강건성의 관계를 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

앞에서 언급했듯이, 관용과 강건성은 P인 대상과 BP인 대상 사이의 경계점이 없다는 것을 함의한다. 그런데 경계점 없음을 외연적으로 이해하면, 우리는 자연스럽게 완충적 관점에 이른다. 이러한 해석에서 강건성은 P인 영역과 BP인 영역 사이의 경계영역이 존재한다는 것을 의미하기 때문에, P이면서 ~DP인 영역은 존재하지 않으며, 그래서 그들 사이에 또 다른 경계영역을 제시해야 하기 때문이다.¹⁵⁾ 그리고 이것이 앞에서 제시한 위계적 모형이다.

그러나 관용과 강건성이 반드시 완충적 관점을 함의하는 것은 아니다. 관용과 강건성을 통해 제시되는 모호성에 대한 직관은 경계영역 자체의 불분명함으로 이해될 수 있기 때문이다. 그리고 이러한 불분명성은 경계점 없음을 함축한다. BP의 경계자체가 불분명하다면, P인 마지막 a_n 과 BP인 첫 번째 a_m 을 명시할 수 없기 때문이다. 그리고 이 경우 고차 모호성 BⁿP는 BP의 모호성을 제거할 수 없음으로 이해될 수 있다. 물론 이 경우에도 BⁿP와 BP의 의미는 동일하지 않다. 그리고 이러한 고차 모호성에 대한 이해는 고차 모호성의 역설의 원인인 제 3의 영역과 DBP의 존재를 함축하지 않는다.¹⁶⁾ 따라서 우리는 고차 모호성이 제거할 수 없는 모호성의 귀결임을 인정하면서도, 고차 모호성의 역설을 피할 수 있다.

동일한 관용과 강건성에 근거하면서도, 완충적 관점과 제거불가능성이라는 개념이 도출되는 이유는 이 두 직관이 근거하는 경계영역 자체가 다양한 해석이 가능한 모호한 개념이기 때문이다. 따라서 DBP를 전제하지 않는 모호성의 개념 특히 제거불가능성의 개념을 분명하게 드러내기 위해서는 모호성 자체에 대한 검토가 요구된다.

제하지 않는 고차 모호성에 대한 설명 모형을 제시할 것이다. Wright(2011)

- 14) 라이트는 위의 두 정의가 동치임을 입증한 후, 완충적 관점에서 고차 모호성의 역설을 도출한다. 그런데 이러한 그의 논의는 이미 분명한 경계영역의 존재를 전제하는 것이다. 이에 반해 필자가 제시하는 제거불가능성은 분명한 경계영역을 전제하지 않는 것이다. 또한 앞으로의 논의를 위해 필자는 라이트가 제시한 정의에서 '진리조건'을 '진술의 의미로'로 수정하였다. Wright(2011)
- 15) P이면서 ~DP인 영역이 존재하지 않는다는 것은 더밋의 규칙으로 잘 알려진 것이다. 그런데 이러한 더밋의 규칙은 분류적 정의에서 유효한 것이므로 앞으로의 논의에서 필자는 더밋의 규칙을 부정하는 모호성에 대한 설명 모형을 제시할 것이다.
- 16) 제 3의 영역의 존재와 DB의 존재는 사실 상 같은 주장이다. 경계영역이 제 3의 영역이라면 그러한 영역들 중 분명한 영역이 존재한다고 할 수 있기 때문이다. 그래서 앞으로의 논의에서는 필요에 따라 '제 3의 영역'과 'DB'를 사용하고자 한다.

4. 모호성에 대한 설명이 만족해야 하는 최소 조건

모호성 무엇인가와 관련된 질문은 크게 보다 두 측면에서 논의될 수 있다. 하나는 모호성에 대한 우리의 직관이 무엇인가이며 다른 하나는 논리적 기술적 문제이다. 전자가 모호성에 대한 가장 근본적인 질문이면서 대답하기 어려운 질문인 반면, 후자는 전자에 의존하는 성격을 갖는다.¹⁷⁾ 그러나 적어도 모순이나 명백히 잘못된 결론을 함축하는 모호성에 대한 정의를 수용할 수 없기 때문에 후자 역시 모호성에 대한 정의에서 중요한 위치를 점한다. 이러한 점을 고려하여, 필자는 이장에서 모호성에 대한 정의가 만족시켜야 하는 최소한의 조건을 제시한 후 다음 장에서 이러한 조건을 만족시키는 구체적인 정의로 극단적 결정불가능성을 제시할 것이다.

우선, 모호성에 대한 정의는 위계적 고차 모호성을 허용해서는 안 된다. 앞에서 살펴보았듯이, 위계적 고차 모호성은 역설을 초래할 뿐 아니라 DB라는 반직관적인 결론을 도출한다. 그래서 모호성에 대한 정의는 위계적 고차 모호성의 중요한 특징으로 2장에서 제시한 세 가지 특성을 함축하지 않아야 한다. 또한 DB를 받아들이지 않기 위해서는, P와 BP가 양립가능함을 주장해야 한다. 경계영역이 분명하다는 것은 BP가 제 3의 독립적 영역임을 함축하는데, 이 경우 P이면서 BP일 수 없기 때문이다.¹⁸⁾ BP가 P와는 다른 제 3의 영역이라면, P를 인정하면 BP가 아니라는 주장은 자연스럽게 도출되기 때문이다.

모호성에 대한 설명이 만족시켜야 하는 최소한의 긍정적 조건은 그것이 적어도 현상적으로라도 경계영역과 고차 모호성을 설명할 수 있는 것이어야 하며 고차 모호성의 역설과 같은 문제를 야기하지 않아야 한다는 것이다. 물론 모호성에 대한 이론이 만족하여야 하는 모든 조건을 열거하기란 쉽지 않다. 그러나 이 글의 주제인 고차 모호성과 관련해서는 앞의 논의를 참고하여 아래와 같은 조건은 최소한 만족해야 한다고 주장할 수 있다.

a) 모호성에 대한 우리의 직관에 부합하는 것이어야 한다. 물론 모호성에 대한 직관이 무엇인지는 논란의 여지가 있지만, 적어도 모호성에 대한 직관을 반영한 아래 규칙들은 만족시켜야 한다.¹⁹⁾ 물론 모호성을 아래 식들을 사용하지 않고, 다른 방식으로 표현할 수 있다. 아래 규칙들을 만족시켜야 한다는 것은 결국 이 규칙들로 표현되는 모호성에 대한 최소한의 직관을 만족시켜야 한다는 것이다.²⁰⁾

17) 많은 경우, 모호성에 대한 구체적이고 기술적 논의는 분명함을 나타내는 'D'와 관련해서 논의된다. 이점은 D를 인식적으로 해석하는 인식주의와 D를 '모든 해석에서 D'로 이해하는 초평가주의를 통해 확인할 수 있다. 그러나 이러한 D에 대한 해석의 차이는 결국 '경계영역'에 대한 이해의 차이에 기초한다.

18) 이러한 주장은 더밋의 규칙이 성립하지 않음을 함축한다.

19) 이 정의들은 모호성 및 D에 대한 해석 그리고 관련된 논리적 틀(특히 D와 관련된 양상적 공리)들에 대한 논의와 무관하게 대부분 받아들여지는 것이다. i)은 모호한 용어는 경계영역뿐 아니라 분명한 영역을 갖는다는 것을 표현하는 것이며, ii)와 iii)은 '분명함'이 만족시켜야 하는 최소한의 조건이기 때문이다.

20) 사실, 이 식들은 '경계영역'을 '분명함'에 의해 이해하는 것이다. 그러나 필자는 이러한 전략 자체가 우리를 오도하는 중요한 요인 중 하나라고 생각하며, 다음 장에서는 '분명함'이 아니라 '결정불가능성'에 의존하는 모호성에 대한 정의를 제시할 것이다. 그러나 이러한 '결정불가능성'을 기초적 용어로 도입한다고 하더라도, 그것에 의해 '분명함'을 정의할 수 있으며, 이렇게 정의된 '분명함'은 위의 규칙들을 만족시킨다. 그리고 Dⁿ를 괄호 안에 넣은 이유는 모호성과 D에 대한 해석에 따라 Dⁿ이 필요할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있기 때문이다.

$$i) (D^n)Pa_1 \wedge (D^n)Pa_n$$

$$ii) D^n P \rightarrow P$$

$$iii) ((D^n)P_{an} \rightarrow (D^n)P_{an-k}) \wedge ((D^n)\sim P_{an} \rightarrow (D^n)\sim P_{an+k})$$

b) 고차 모호성이 가능해야 한다. 고차 모호성 자체는 관용과 강건성이 모두 함의하는 것이다. 따라서 고차 모호성의 정의 및 그것의 존재에 대해서는 논란의 여지가 있을 수는 있지만, 적어도 현상적이라도 모호성이 제거되지 않는다는 것은 받아들일 수 있어야 한다.

c) 제거불가능성을 만족시켜야 한다. b)를 받아들인다면, 고차 모호성의 역설 야기하지 않는 개념인 제거불가능성을 받아들여야 한다.²¹⁾

d) 다른 비결정성(수학적 비결정성(ex: 골드바하 추측), 미래의 우연, 단순한 의미론적 불완전성)과 모호성을 구분할 수 있어야 한다.

e) 더미의 역설의 해결할 수 있는 것이어야 한다.²²⁾

5. 극단적 결정불가능성으로서의 모호성

4장의 논의에도 불구하고, 모호성이 무엇인가의 문제는 여전히 우리를 직관과 관련된 해결하기 어려운 논란으로 이끈다. 이러한 조건에서는 일반적으로 모호성을 규정한다고 받아들여지는 기본적 식과 그 식이 기초하는 직관을 역추적 하는 것이 효과적일 수 있다.

주지하듯, 경계사례는 ‘ $\sim DPa \wedge \sim D\sim Pa$ ’로 정의된다.²³⁾ 그리고 적어도 일차 모호성에서 BP와 B~P가 동치이다. 즉 ‘a가 P인지 모호하다’와 ‘a가 ~P인지 모호하다’가 동치라는 것이다. 따라서 위의 식은 ‘a가 DP인 것도 아니고 DP가 아닌 것도 아니다’를 의미할 수도 있지만, ‘a가 DP 인지 (그렇지 않은 지)를 결정할 수 없음’을 의미할 수도 있다.

이점은 위의 식을 통해 표현되는 직관을 검토 봄을 통해 다시 논의할 수 있다. 위의 식은 결국 ‘a가 분명하게 P인 것도 아니고 분명하게 P가 아닌 것도 아님’을 의미한다. 그런데 이러한 분명함 즉 D는 모호성에 대한 이해전략에 따라 다양하게 해석된다. 그래서 이러한 개

물론 대상들은 더미의 연쇄를 구성하는 것들이다.

21) 제거불가능성이 이가율의 도입과 같은 비교전 논리학의 도입을 함의하지는 않는다. 여기에서 말하는 제거불가능성이란 모호성의 정의와 관련된 제거불가능성이다. 다시 말해, 모호성을 인식적 현상으로 이해한다면, 적어도 인식적으로는 모호성이 제거되지 않음을 의미한다. 물론 의미론적 전략에도 동일한 기준이 적용된다.

22) 더미의 역설에 대한 해결 전략의 제시는 매우 중요한 요소이다. 그러나 이 글은 모호성에 대한 새로운 이해의 가능성을 제시하는 것이기 때문에, 더미의 역설에 대한 구체적인 해결 방법은 이 글에는 포함하지 않았다.

23) 물론 경계영역은 경계사례의 집합이다.

념 이전에 있는 기본적 직관은 결국 a를 P라고 할 수도 없고 P가 아니라고 할 수도 없는 상황이 존재한다는 것이다.²⁴⁾ 그런데 이러한 상황이란 a가 P인지 $\sim P$ 인지 결정할 수 없는 상황이다. 따라서 ‘분명함’ 보다는 ‘결정할 수 있음’ 혹은 ‘결정할 수 없음’이 모호성과 관련된 더 근본적 개념일 수 있다. 그런데 이러한 결정의 적용범위와 관련해서 두 해석이 존재한다. 하나는 P이거나 $\sim P$ 를 결정할 수 없다는 것이며, 다른 하나는 P도 결정할 수 없고 $\sim P$ 도 결정할 수 없다는 것이다. 이러한 해석들을 ‘결정 가능성’을 나타내는 ∇ 을 통해 정식화하면 다음과 같다.²⁵⁾

해석1) $\sim \nabla (Pa \wedge \sim Pa)$

해석2) $\sim \nabla Pa \wedge \sim \nabla \sim Pa$

물론 ∇ 에 대한 해석에 따라 달라질 수 있지만, 해석1)은 a가 P도 아니고 $\sim P$ 도 아닌 제 3의 영역에 속함을 의미하는 것으로 이해될 수 있다. 그리고 이러한 이해는 결국 앞에서 부정한 모호성에 대한 분류적 이해이다. Pa가 참도 거짓도 아닌 제 3의 값을 갖는다는 것은 그러한 값이 적용되는 영역이 참이나 거짓인 다른 영역과 구분됨을 함의하기 때문이다.²⁶⁾

이에 반해, 해석2)는 a가 P인지도 결정하지 못하고 P가 아닌지도 결정하지 못한다는 것으로 이것은 a가 P일 수 있는 가능성을 열어두고 있을 뿐 아니라, Pa에 특정한 값을 부여하지 않는 의미론적 평가를 가능하게 한다. 그런데 이러한 의미론적 평가는, a가 P인지 $\sim P$ 인지 결정하지 못해서 관련된 질문에 아무런 답을 못하는 경우 모호성이 발생한다는 우리의 직관에 부합하는 것이기도 하다.

물론 ∇ 에 대한 해석에 따라 해석2)가 해석1) 혹은 해석1)과 같은 직관에 근거하는 유사한 식을 함축한다는 주장이 가능하다. 그러나 해석2)가 해석1)을 반드시 함축하는 것은 아니기 때문에, 분류적이지 않은 경계영역에 대한 이해란 결국 해석1)을 함의하지 않는 해석2)에 기초한 이해라고 할 수 있다. 그런데 해석1)을 함의하지 않는 해석2)에 대한 이해란 ‘결정불가능성’을 글자 그대로 받아들이는 것이다. 즉 a가 P인지 $\sim P$ 인지를 결정할 수 없다는 것은 Pa와 관련된 어떤 결정도 내릴 수 없다는 것이다. 그리고 이러한 결정불가능성에 기초할 경우 우리는 Pa와 BPa의 양립가능성을 보다 분명하게 주장할 수 있다. 비록 Pa가 참이더라도, 인식적 혹은 의미론적 여건에 의해서 그것이 참인지 거짓인지 결정할 수 없는 상황이 발생할 수 있기 때문이다. 그런데 이러한 ‘결정불가능성’에 대한 이해는 곧 a가 P일 수도 있고 P가 아닐 수도 있음을 함의한다. Pa인지 $\sim Pa$ 인지 결정할 수 없다는 것은 곧 Pa일 수도 있고 $\sim Pa$ 일 수도 있음을 함의하기 때문이다.²⁷⁾

24) 실제로 D가 도입되는 가장 중요한 이유 중 하나는 ‘P도 아니고 $\sim P$ 도 아니다’는 주장을 통해서 더미의 역설을 해결할 수 없기 때문이다. 그래서 ‘분명함’ 자체를 기본적 직관으로 볼 필요는 없다.

25) Bobzien(2013), p. 10 참조.

26) 물론 이러한 주장은 ∇ 을 의미론적으로 이해한 것이다. 그러나 본 논의는 경계영역의 실재와 관련된 논의가 아니기 때문에 이러한 주장은 인식적 전략에도 그대로 적용된다.

27) P일 수도 있고 $\sim P$ 일 수도 있다는 주장은 가이프만(Gaiffman)에 의해서 제시되기도 하였다. Gaiffman(2010),

이러한 주장이 가능한 이유는 ‘Pa가 결정 불가능하다’와 ‘~Pa가 결정 불가능하다’가 동치이기 때문이다. 다시 말해, 위에서 언급한 글자 그대로의 결정불가능성을 I로 표기할 경우 IPa와 I~Pa는 동치이다. a가 P일수도 있으며 ~P일수도 있다는 것은 Pa에 대해서 어떤 의미론적, 인식적 판단을 내리지 못했음을 의미하며, 그래서 IPa와 I~Pa가 동치라는 것이다. 그리고 이것은 곧 P의 경계영역을 확정하지 못함을 함의한다. a가 P인지 결정할 수 없다는 것은 곧 그것의 적용여부가 불분명해서 경계를 확정할 수 없음을 함의하기 때문이다. 그런데 이러한 ‘결정불가능성’은 최선의 인식적, 의미론적 도구가 사용됨을 전제한다.²⁸⁾ 따라서 IPa란 모든 가용한 수단을 사용해서도 결정 불가능함을 의미한다.²⁹⁾ 그리고 이것이 필자가 주장하는 극단적 결정불가능성이다. 따라서 필자는 분류적으로 오해 가능한 D대신 극단적 결정불가능성을 의미한 I를 모호성을 드러내는 기본적 연산자로 사용하고자 한다.

그리고 이러한 IP에 의존할 경우, IPa이면 IIPa 역시 성립한다. IPa라면 a가 P인지 그렇지 않은지를 결정할 수 없기 때문에, 이 경우 우리는 Pa에 대해서는 어떤 인식적, 의미론적 판단(결정)도 내리지 못한다. 그리고 이 경우 우리는 a가 IP를 만족하는지 그렇지 않은지 역시 결정하지 못하며 그래서 IIPa가 성립한다. 다시 말해, IIP란 IP인지 아닌지에 대한 결정불가능성을 주장하는 것인데, IPa가 성립한다는 것은 Pa에 대해 어떤 판단(결정)도 내리지 못함을 의미하기 때문에, 그러한 IPa에 대해서도 어떤 판단도 내리지 못한다는 것이다. 그래서 아래와 같은 규칙이 성립한다.

II- 법칙: $IP \rightarrow I^nP$

그렇다고 이러한 주장이 고차 모호성이 불필요하거나 일차모호성으로 환원됨을 의미하지는 않는다. 이점은 ‘결정불가능성’에 대한 인식적 이해와 의미론적 이해에서 다르게 나타날 수 있다. 예를 들어, IPa를 ‘P와 관련된 언어적 규칙들에 의해 a가 P인지 결정할 수 없다’로 이해했을 경우, IIPa는 ‘그러한 의미론적 결정이 옳은지 그른지를 P와 관련된 언어 규칙에 의해 결정할 수 없다’와 같이 이해될 수 있으며, 이 경우 IPa와 IIPa로 주장하는 내용은 달라지기 때문이다. 더욱이 ‘결정불가능성’을 인식적으로 이해했을 경우, IPa를 결정하는 인식주체와 IIPa를 결정하는 인식주체가 달라질 수 있다는 것을 통해 이 두 진술의 차이를 설명할 수 있다.³⁰⁾

그래서 IIPa는 IPa와 다른 진리조건을 가지면서도 모호성은 제거되지 않는다고 할 수 있다. 따라서 극단적 결정불가능성에 기초하는 고차 모호성은 경계의 외연과 관련된 것이 아니라, 그러한 불분명성이 추가적인 의미론적, 인식적 도구(혹은 설명)에 의해 제거되지 않음 즉 모호성의 제거불가능성을 의미한다고 할 수 있다. 그리고 이것이 분명한 경계영역을 설정하지 않았음에도 불구하고 고차 모호성을 인정할 수 있는 이유이다. 예를 들어, 이차

P.35.

28) 이러한 조건을 전제하지 않을 경우, 모호성은 단순한 인식적, 의미론적 결함으로 이해될 수 있다.

29) 이와 관련해서, 밥자인은 CRISP라는 합리적 결정자를 제시하기도 하였다. CRISP란 이상적 요소를 포함하는 인식적 장애를 갖지 않는 합리적 결정자이다. Bobzien(2010), 참조.

30) Bobzien(2010) 참조.

모호성을 일차모호성과 구분되는 또 다른 영역으로 이해하는 것이 아니라, a가 P인지 그렇지 않은지를 결정할 수 없음을 결정할 수 없음을 주장하는 것으로 이해할 수 있다는 것이다. 이러한 극단적 결정불가능성과 그것에 근거하는 고차 모호성을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

			→ dimension D →
Level 1	P	IP	$\sim P$
Level 2	P	I^2P	$\sim P$
Level 3	P	I^3P	$\sim P$
...			
Level n	P	I^nP	$\sim P$

물론 위의 표에서 가운데 영역과 좌, 우 영역의 경계가 흐릿함은 전제된다. 그런데 위의 표에서 드러나듯이, 필자는 P나 $\sim P$ 에 대해서는 D와 같은 연산자를 사용하지 않았다. 필자가 P나 $\sim P$ 에 특별한 연산자를 사용하지 않은 이유는 모호성은 그것이 고차 모호성이라고 하더라도, 경계영역은 여전히 P와 $\sim P$ 사이의 영역이라는 것과 D를 도입할 경우 앞에서 살펴본 위계적 구조와 유사한 구조가 발생할 수 있기 때문이다.³¹⁾

더욱이 앞에서 살펴보았듯이, D에 의존하는 경우 우리는 n차 경계영역을 P와 B^nP 사이의 경계영역으로 이해할 수 있으며 D^nP 와 B^nP 사이의 경계영역으로 이해할 수도 있다.³²⁾ 그런데 이 두 주장은 동치가 아닐뿐더러, 이 두 주장이 동치이기 위해서는 분명한 경계영역을 함의하는 D-도입을 수용해야 한다.³³⁾ 그런데 우리가 P가 모호하고 그러한 모호성이 제거될 수 없다고 말하는 것은, P와 $\sim P$ 사이의 경계영역을 확정할 수 없을 뿐 아니라 그러한 경계의 불분명성이 제거될 수 없다는 것이지, P와 진리조건이 다른 D^nP 와 B^n 사이의 경계영역을 주장하는 것이 아니다. 또한 고차 모호성을 D^nP 와 B^nP 에 의해 정의한다면, 이러한 경계영역은 P의 경계영역이 아니라 D나 B의 경계영역이라고 할 수 있다. 다시 말해 그러한 경계영역은 P의 모호성 뿐 아니라 D나 B의 모호성에 기초하는 것이라고 할 수 있다. 따라서 모호성은 P와 BP 즉 IP 사이의 경계영역으로 이해해야 하며, 고차 모호성 역시 P와 I^nP 사이의 경계영역이라고 할 수 있다.

그리고 이러한 극단적 결정불가능성은 앞에서 언급한 모호성에 대한 이론이 만족시켜야 하는 조건들을 모두 충족한다. 우선 부정적 조건으로 제시된 분류적 정의와 관련된 조건들을 모두 충족시키는 어렵지 않게 확인할 수 있다. 극단적 결정불가능성은 제 3의 영역이나 DB를 전제하는 것이 아니기 때문이다. 긍정적 조건 역시 충족시킨다.

31) 밥잔인은 D와 유사한 C를 사용하면서도 위와 같은 모호성의 구조를 얻기 위해, $C \rightarrow C^nP$ 를 도입한다. 그러나 이 규칙은 모호성과 관련된 많은 논란을 야기할 뿐 아니라, 모호성은 여전히 P와 $\sim P$ 의 경계영역이기 때문에 그리고 C를 도입할 경우 모호성은 P의 모호성이 아니라 C의 모호성일 수 있기 때문에, 필자는 D 혹은 C를 받아들이지 않고자 한다. Bobzien(2010, 2013) 참조.

32) 각주 7) 참조. 특히 앞에서 제시한 위계적 모형처럼 D를 명시적으로 사용하면, n-차 모호성은 P 혹은 D^nP 와 $DB^{n-1}P$ 사이의 경계영역으로 정의할 수 있다.

33) 각주 6) 참조

긍정적 조건 a)와 관련해서 극단적 결정불가능성은 모호성에 대한 직관에 부합함은 이미 설명하였다. 물론 극단적 결정불가능성은 D와 같은 연산자에 의존하지 않는다. 그러나 이러한 DPa는 ' $Pa \wedge \sim IPa$ '로 정의될 수 있으며, 이러한 정의에 기초한다면 우리는 극단적 결정불가능성이 모호성과 관련된 추론규칙을 모두 만족시킴을 보일 수 있다. 더불어 앞에서 확인했듯이, 극단적 결정불가능성은 P와 BP의 양립가능성을 함축한다.

긍정적 조건 b) 역시 만족시킨다. 앞에서 보았듯, 극단적 결정불가능성은 고차 모호성의 존재를 인정하는 이론이기 때문이다.

긍정적 조건 c)는 모호성이 제거되지 않음인데, 이러한 조건은 II-법칙에 의해 확보된다.

긍정적 조건 d)와 관련해서, 우리는 극단적 결정불가능성을 통해 다른 결정 불가능한 진술과 모호성의 차이를 설명할 수 있다. 예컨대, 골드바하의 추측과 관련해서 이러한 추측은 IIPa를 만족시키지 못하는 반면 극단적 결정불가능성은 II-법칙에 따른다. 더 나아가서, 극단적 결정불가능성에 따를 경우 우리는 경계영역안의 대상들의 결정가능성 관련된 차이를 발견할 수 없다. 즉 그들은 모두 결정 불가능할 뿐이다. 그래서 Degree이론과 다르게 극단적 결정불가능성을 따를 경우, 경계영역안의 대상들에 대한 진술들은 모두 결정 불가능할 뿐이다. 그리고 이것이 부정적 조건의 iii)을 만족시키는 이유이기도 하다. 다시 말해, 극단적 결정불가능성에 기초할 경우 P로 시작해서 $\sim P$ 로 이어지는 더미 연쇄의 경계영역 내부의 위치는 의미를 갖지 않는다. 그래서 P에 가까운 a_n 과 $\sim P$ 에 가까운 a_m 의 차이는 무의미하다.

참고 문헌

- Bobzien, S. (2010), “Higher–Order Vagueness, Radical Unclarity and Absolute Agnosticism”, *Philosopher's Imprint*, 10. pp. 1–30.
- Bobzien, S. (2013), “Higher–Order Vagueness and Borderline Nesting: A Persistent Confusion”, *Analytic Philosophy*, 54. pp.1–43.
- Fara, D. G. (2003), “Gap principles, penumbral consequence, and infinitely higher–order vagueness.” in Beall (ed), *Liars and Heaps: New Essays on Paradox*, Oxford, pp.195–221.
- Gaiffman, H. (2010), “Vagueness, Tolerance and Contextual logic”, *Synthese*, 174. pp.5–46.
- Raffman, D. (2011), “Demoting Higher–Order Vagueness”, in Dietz and Morruzzi, (eds), *Cut and Clouds*, Oxford, pp.523–549.
- Sainsbury, M. (1991), “Is There Higher–Order Vagueness?”, *Philosophical Quarterly*, 41. pp.147–165.
- Sapiro, S. (2006), *Vagueness in Context*, Oxford.
- Wright, C. (1992), “Is Higher–Order Vagueness Coherent”, *Analysis*, 52. pp.129–139.
- Wright, C. (2011), “The Illusion of Higher–Order Vagueness”, in Dietz and Morruzzi, (eds), *Cut and Clouds*, Oxford, pp.523–549.
- Zardini, E. (2013), “Higher–Order Sorites Paradox”, *Journal of Philosophical Logic*, 42. pp.25–48.

발 표 3:

“거짓말쟁이 문장은 무모순율의
반례인가?”

발표자: 송하석 선생님(아주대)

1. 들어가는 말

거짓말쟁이 문장(λ)은 고전 논리학과 타르스키(A. Tarski)의 T-추론을 받아들이면, 흔히 거짓말쟁이 역설(liar paradox)이라고 불리는 의미론적 역설을 낳는다는 것은 널리 알려진 사실이다. 타르스키 이후, 고전 논리학을 최소한으로 수정하면서 이 역설을 해결하려는 다양한 시도가 있어 왔다. 대표적으로 타르스키는 그 역설의 발생 원인을 자기지지적(self-referential)이라는 데서 찾고 언어의 위계를 나눔으로써 그 문제를 해결하고자 한다. 그런데 타르스키의 제안이 성공적이지 않다는 반성 위에서 20세기 후반부터 다시, 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위한 여러 가지 견해가 제시되었다. 이러한 견해 중 대표적인 것이 초완성(para-completeness) 견해와 초일관성(para-consistency) 견해이다.

크립케(S. Kripke)에 의해서 제안된 초완전성 견해는 거짓말쟁이 문장이 참도 거짓도 아니라고 주장함으로써 거짓말쟁이 역설을 해결하고자 한다. 그러나 크립케의 초완전성 견해는 이미 제시된 다른 해결책과 마찬가지로 복수의 문제(revenge problem)로부터 자유롭지 않다는 지적이 제기되었다. 최근 필드(H. Field)와 모드린(T. Maudlin) 등은 크립케의 초완전성 견해를 수정, 발전시켜 복수의 문제 등을 피할 수 있는 진리론을 제시한다. 한편으로 프리스트(G. Priest), 볼(JC. Beall) 등은 양진주의(dialetheism)라고 알려진 초일관성 견해를 제안한다. 초일관성주의는 거짓말쟁이 문장을 참이면서 동시에 거짓인 문장이라고 주장한다. 다시 말해서 거짓말쟁이 문장은 일종의 양진문장(dialetheia)이라는 것이다. 어떤 문장과 그 문장의 부정이 모두 참일 때, 그 문장을 양진문장이라고 한다. 초일관성주의의 주장대로 거짓말쟁이 문장이 양진문장이라면, 거짓말쟁이 문장은 고전 논리학이 자명하게 참으로 받아들이는 무모순율(Law of Non-Contradiction: 이하 LNC)의 반례가 된다. 과연 양진주의의 주장대로 거짓말쟁이 문장은 LNC의 반례인가?

양진주의가 철학사에 처음 등장한 동기는 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위한 것은 아니었다. LNC가 명료하게 제시된 최초의 문헌은 아마 아리스토텔레스의 『형이상학』 일 것이다. 아리스토텔레스가 LNC를 명료하게 제시하면서 이를 옹호했다는 사실은 아리스토텔레스 이전 혹은 그 당대에 모순을 주장한 철학자가 있었다는 방증이기도 하다. 실제로 헤라클레이토스와 많은 소피스트의 철학자들이 거짓말쟁이 역설과 상관없이 모순을 주장하였고, 그런 점에서 그들은 양진주의자였다고 할 수 있고, 아리스토텔레스 이후에도 양진주의 견해를 받아들인 철학자들이 있었다.³⁴⁾ 그럼에도 20세기 후반 다시 양진주의가 등장하게 된 것은 바로 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위한 것이 가장 중요한 동기였다고 할 수 있다.

고전 논리학을 수정하지 않은 채, 양진주의를 받아들이면 모든 문장은 참이라는 주장, 이른바 전진주의(trivialism)를 받아들여야 한다. 그런데 직관적으로 전진주의는 받아들이기 어렵다고 인정하는 양진주의자들은 양진주의가 전진주의를 함축하지 않는 논리체계, 초일관성주의를 제시한다. 결국 초일관주의적 양진주의자들은 참인 모순(true contradiction)이 있지만 그로부터 모든 문장이 참이라는 것은 따라 나오지 않는다고 주장한다. 이를 위해서 초일관성주의자들은 고전 논리학을 수정하지 않을 수 없다. 대표적인 초일관성주의자, 프리스트는 1979년 처음으로 초일관주의 논리체계를 제시한 이래, 전진주의를 거부하면서 양진주의를 유지할 수 있음을 주장하고 있다.

이 글은 거짓말쟁이 문장을 양진문장으로 보고 무모순율이 반드시 참인 것은 아니라는 양진주의, 보다 구체적으로 말해서 프리스트 식의 초일관성주의에 대해서 비판적으로 검토

34) Zalta & Berto (2008), §2. 참고.

하는 것이다. 초일관주의적 양진주의에 대한 비판은 프리스트가 역설의 논리학(Logic of Paradox: 이하 LP)을 제시하자마자 제기되었다.³⁵⁾ 그러나 2006년 프리스트는 그 때까지 제시된 여러 비판들에 답하고, 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위해서 자신이 제시한 견해를 부분적으로 수정하여 *In Contradiction*의 2판을 출간하고 이어서 *Doubt Truth to be a Liar*를 출간하였다. 이 글의 목적은 바로 2006년 이후에 제시된 프리스트의 논리체계와 견해에 대해서 비판적으로 검토하는 것이다.

2절에서는 프리스트가 거짓말쟁이 역설과 같은 의미론적 역설을 해소하기 위해서 제시한 LP에 대해서 간략하게 소개하고, LP가 양진주의로부터 전진주의로의 추론을 어떻게 봉쇄하는지를 설명할 것이다. 그리고 프리스트가 1990년부터 2005년 사이에 양진주의에 대한 비판에 대해서 답하기 위해서 수정한 견해에 대해서 간단히 살펴볼 것이다. 3절에서는 프리스트의 LP와 그의 초일관주의적 양진주의가 갖는 문제점을 지적하고, 4절에서는 거짓말쟁이 역설에 대한 초일관성 견해도 다른 해결방안과 마찬가지로 복수의 문제(revenge problem)에 부딪힌다는 점을 논증할 것이다. 구체적으로 말해서 LP에서 ‘단지 참(only true)’과 ‘단지 거짓(only false)’을 적절하게 표현하기 어렵다는 점을 지적하고 LP를 수정해서 이를 표현할 수 있도록 하면, 복수의 문제를 낳음을 보일 것이다. 일반적으로 초일관성주의의 가장 큰 매력은 의미론적 역설에 대한 다른 해결책과 달리 복수의 문제를 낳지 않는다는 점이라고 주장되어 왔다. 그런데 초일관성주의도 여전히 복수의 문제를 낳는다면 초일관성주의의 가장 큰 매력 중 하나를 잃는 것이고, 초일관성주의가 복수의 문제에 적절히 답할 수 없다면 그 견해는 설득력을 갖기 어려울 것이다.

결론적으로 거짓말쟁이 문장을 LNC의 반례라고 보는 양진주의 견해가 성공적이지 않으며, 따라서 거짓말쟁이 문장은 LNC의 반례가 아니라고 주장할 것이다. 물론 양진주의가 성공적이지 않음을 보인다고 해서 그것이 곧 거짓말쟁이 문장이 양진문장이 아니라는 결론은 따라 나오지는 않는다. 이 글의 목적은 거짓말쟁이 역설에 대한 적극적인 해결책을 제안하는 데 있는 것이 아니고, 거짓말쟁이 문장이 LNC의 반례라고 주장함으로써 거짓말쟁이 역설을 해결할 수 있다고 주장하는 초일관성주의를 비판하는 데 있고, 거짓말쟁이 문장이 LNC의 반례라는 양진주의 견해가 옳지 않음을 보이는 데 있다.

2. 초일관주의의 논리

초일관주의자들 중 가장 대표적인 사람은 프리스트이다. 먼저 프리스트의 초일관성 논리, 그가 역설의 논리학이라고 부른 LP에 대해서 살펴보자. 초일관주의 논리의 핵심은 논리적 형식으로 구성된 문장이 가질 수 있는 진리값은 참과 거짓 두 가지뿐이지만, 이 두 가지의 진리값이 서로 배타적인 것은 아니라는 것이다. 즉 초일관주의에 따르면 진리값에 따라 문장을, 참인 문장, 거짓인 문장, 그리고 참이면서 동시에 거짓인 문장, 이렇게 세 가지 유형으로 나눌 수 있다. 그는 참이면서 동시에 거짓인 양진문장의 예로 거짓말쟁이 문장, 커리의 문장, 그리고 러셀의 집합론적 역설을 낳는 문장들을 든다. 프리스트가 제시한 LP에서

35) 양진주의에 대한 비판으로 대표적인 것으로 T. Parsons (1990), G. Littmann & K. Simmons (2004), B. Whittle (2004), Zalta (2004) 등을 꼽을 수 있다. 이들의 비판은 대체적으로 이 글에서 다루어지겠지만, 커리의 역설과 관련하여 프리스트의 LP가 문제에 부딪힌다는 휘틀의 반론은 지면 관계가 상 여기서 다루지 않을 것이다.

복합문장에 대한 진리값은 다음과 같이 결정된다. ('b'는 참이면서 동시에 거짓임을 나타낸다.)

ϕ	$\neg\phi$
t	f
b	b
f	f

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$
t	t	t	t
t	b	b	t
t	f	f	t
b	t	b	t
b	b	b	b
b	f	f	b
f	t	f	t
f	b	f	b
f	f	f	f

그리고 LP에서 조건문은 실질함축으로 해석된다. 즉 $(\phi \rightarrow \psi)$ 는 $(\neg\phi \vee \psi)$ 와 동치이다. 양진주의자들이 고전 논리학의 함축 개념을 그대로 받아들이면, 모든 것이 참이라는 전진주의를 받아들여야 한다. 그래서 초일관주의적 양진주의자로서 프리스트는 전진주의를 피하기 위해서 선언삼단논법(disjunctive syllogism), 즉 선언 제거의 규칙을 받아들이지 않는다. 요컨대 프리스트의 LP는, 첫째 모든 문장은 참이거나 거짓이지만 참과 거짓은 배타적이지 않아서 참이면서 동시에 거짓인 문장이 있으며, 둘째 폭발논증(argument from explosion)에 의해서 모든 문장이 참이라는 불합리를 피하기 위해서 고전논리학이 받아들이는 선언삼단 논법의 규칙을 거부하는 논리 체계이다.³⁶⁾

또한 프리스트의 LP에서 T-도입과 T-제거는 일반적으로 성립한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\phi \leftrightarrow T(\langle \phi \rangle)$$

따라서 ϕ 가 참이면, 'φ는 참이다'도 참이고, ϕ 가 거짓이면 'φ는 참이다'도 거짓이다. 또한 ϕ 가 양진문장이어서 참이면서 동시에 거짓이면, 'φ는 참이다'도 양진문장이고, 'φ는 거짓이다'도 양진문장이다.

앞에서 언급한 것처럼, 초일관주의적 양진주의자들은 참과 거짓이 전체 진리값을 포괄하지만(exhaustive), 서로 배타적이지는(exclusive) 않다고 주장한다. 즉 그들은 '어떤 문장이 참/거짓이 아니면 거짓/참임'을 받아들이지만, '어떤 문장이 거짓/참이면 참/거짓이 아니라는 것'은 받아들이지 않는다. 결국 프리스트는 다음 두 식에서 (i)은 받아들이지만, (ii)는 받아들이지 않는다.

- (i) $\neg T(\langle a \rangle) \rightarrow T(\langle \neg a \rangle), \neg T(\langle \neg a \rangle) \rightarrow T(\langle a \rangle)$
- (ii) $T(\langle \neg a \rangle) \rightarrow \neg T(\langle a \rangle), T(\langle a \rangle) \rightarrow \neg T(\langle \neg a \rangle)$

36) T-추론의 조건문을 실질적 함축의 조건으로 해석하면서 선언 삼단논법의 추론을 거부하면, 전진 긍정식(Modus Ponens)의 추론도 거부해야 한다. 프리스트는 이 점을 인정하면서 전진 긍정식을 만족하는 내포적 조건(intensional conditional)을 부가한다. 그리고 그는 Priest (2006)에서 이 연산자의 의미론을 가능세계와 불가능 세계를 구별하는 가능세계 의미론을 통해서 제시한다. pp. 269~270.

프리스트는 (i)을 포괄 원리(exhaustion principle), (ii)를 배타 원리(exclusion principle)이라고 부른다. 그가 배타 원리 (ii)를 거부하는 것은 양진문장의 존재를 인정하기 때문에 당연한 것처럼 보인다. 즉 양진문장에 대해서는, 그 문장이 거짓이라고 해서 그것이 참이 아니라고 할 수 없기 때문이다. 그런데 고전 논리체계에서 (ii)는 다음과 같이 쉽게 증명될 수 있다.

- ① $T(\langle a \rangle) \rightarrow a$ (T-제거)
- ② $T(\langle \neg a \rangle) \rightarrow \neg a$ (T-제거)
- ③ $\neg a \rightarrow \neg T(\langle a \rangle)$ (①의 대우)
- ④ $T(\langle \neg a \rangle) \rightarrow \neg T(\langle a \rangle)$ (②, ③의 가언삼단논법)

결국 프리스트는 (ii)를 거부하기 위해서는 대우(contraposition)의 규칙도 추론규칙으로 받아들여서는 안 된다. 사실 프리스트는 (ii)에 대한 자신의 견해를 제시하고 (ii)를 거부하는 논증을 나중에 제시하겠다고 미루지만, 그가 대우의 규칙을 거부하면서 제시한 유일한 이유는 그것이 (ii)를 함축한다는 것일 뿐이다.³⁷⁾ 그러나 T-추론에 사용되고 있는 조건이 대우의 규칙을 허용하지 않는다면, 그 조건문은 후건부정식(Modus Tollens)도 적용할 수 없게 된다. 우리가 어떤 믿음을 가졌을 때 이 믿음에 반하는 증거가 제시될 경우 우리의 믿음을 수정해야 한다는 것은 매우 자연스러운 직관이고 이러한 직관이 논리적 형식으로 나타나는 것이 후건부정식이라고 할 때, 이러한 자연스러운 직관이 적용될 수 없는 조건문이란 도대체 어떤 조건문이어야 할까? 프리스트는 초일관주의 의미론이 반드시 일관적이어야 할 필요가 없기 때문에 (ii)를 받아들일 수도 있다고 말한다. 그래서 그는 (ii)를 거부하는 것을 잠정적(tentative)이라고 한다.³⁸⁾ 그러나 이러한 주장은 언어 행위와 관련된 화용론적인 문제를 낳는다.

어떤 문장에 대해서 수용(accept)하거나 거부(reject)하는 행위가 모든 문장에 적용될 수 있는 것은 아니라고 하더라도 서로 배타적이라는 생각은 매우 자연스럽다. 다시 말해서 우리는 모든 문장에 대해서 수용과 거부를 결정할 수는 없다고 할지라도 하나의 문장에 대해서 그 문장을 수용하면서 동시에 거부할 수는 없다고 생각한다. 프리스트도 이 점을 인정한다.³⁹⁾ 그런데 수용과 거부라는 인지적 상태가 언어 행위로 드러나는 것이 바로 주장(assertion)과 부인(denial)이다. 그런 점에서 주장과 부인이라는 언어 행위가 모든 문장에 대해서 포괄적으로 적용될 수 있는 것은 아닐지라도 배타적으로 적용되어야 한다는 것은 자연스러운 것으로 여겨진다. 프리스트는 2006년 이후, 배타 원리를 포기한 자신의 견해를 유지하기 위해서 수용과 거부의 배타성이라는 직관을 포기하고 따라서 주장과 부인의 배타성도 포기한다. 즉 그는 하나의 문장에 대해서 주장하면서 동시에 부인할 수 있는 경우가 있을 수 있고, 거짓말쟁이 문장이 바로 그런 경우에 해당한다고 설명한다.

37) Priest (2006a), p. 79.

38) Priest (2006a) p. 70.

39) 프리스트는 *In Contradiction*의 1판에서 ‘누구도 합리적으로 하나의 문장을 수용하면서 동시에 거부할 수 없다’고 주장했다. 그러나 2006년의 2판에서 이 견해를 포기한다고 말한다. 그리고 동일한 문장에 대해서 수용하면서 동시에 거부할 수밖에 없는 경우가 있다고 말한다. 그리고 이와 유사한 논증은 Priest (2006b), 6장에 서도 제시된다.

3. 초일관주의적 양진주의에 대한 비판적 평가

초일관주의자들은 거짓말쟁이 문장 (λ)가 양진문장이라고 주장한다. 즉 다음을 주장한다.

(A) (λ)는 참이면서 동시에 거짓이다.

그렇다면 (A)의 진리값은 무엇인가? (λ)는 참이면서 동시에 거짓인 양진문장이므로, ‘(λ)는 참이다’도 양진문장이고, ‘(λ)는 거짓이다’도 양진문장이다. ‘(λ)는 참이면서 동시에 거짓이다’는 이 두 문장의 연언적 결합이고, LP에서 연언문장의 연언지가 모두 양진문장이면 연언문장도 양진문장이므로, ‘(λ)는 참이고 (λ)는 거짓이다’도 양진문장이다. 다시 말해서 (A)는 참이면서 동시에 거짓인 양진문장이다. 그런데 LP에서 한 문장이 양진문장이면 그것의 부정도 양진문장이다. 따라서 ‘ $\neg$ (A)’도 참이면서 거짓인 양진문장이다. 그러므로 ‘ $\neg$ (A)’는 참이다. 결국 양진주의자들은 (A)를 주장할 수 있음과 동시에, ‘ $\neg$ (A)’ 즉 ‘(λ)는 참이면서 동시에 거짓이라는 것은 참이 아니다’고 주장해야 한다. 이 점은 양진주의 논리체계로부터 따라 나오는 것이므로, 이런 불합리를 해결해야 하는 것이 양진주의의 첫 번째 과제인 셈이다. 하나의 이론이 그 이론의 핵심적인 주장의 거짓을 함축한다는 것은 심각한 문제가 아닐 수 없기 때문이다.

프리스트는 (A)가 참이면서 동시에 거짓인 양진문장이기는 하지만, 그는 (A)가 거짓임이 (A)가 참임을 훼손하지 않는 단순한 잉여의 정보일 뿐이라고 말한다. 물론 일관성은 유지될 수 없지만, 양진주의의 목적은 의미론적 역설을 일관성을 유지하면서 해결하는 방안을 제시하고자 하는 것이 아니라 어떻게 비일관성이 관용될 수 있는지를 보여주는 것이기 때문에 그것은 큰 문제가 아니라고 주장한다.⁴⁰⁾

그러나 (λ)가 양진적이어서 비일관성을 낳는다는 것과 (A)가 양진적이어서 비일관성을 낳는다는 것은 다르다. (A)는 거짓말쟁이 문장에 대한 양진주의자들의 이론적인 주장인데, 그것이 비일관적이라는 것은 이론 자체에 비일관성이 포함되어 있다는 의미이다. 물론 프리스트가 말한 것처럼, 의미론적 역설을 일관성을 유지하면서 해결하려는 것이 양진주의의 목적이 아니라는 점에서 이것은 그 자체로 문제가 아니라고 주장할 수도 있을 것이다. 그러나 양진주의자들이 거짓말쟁이 문장을 양진문장이라고 하는 이유는 그 문장이 병리적인(pathological) 문장이기 때문이고, 그들도 그러한 병리적인 문장이 자신들의 이론에 확대되는 것을 차단하고자 하고 한다. 사실 프리스트는 자신이 배타 원리를 거부하는 또 다른 이유는 배타원리 (ii)를 받아들이면 거짓말쟁이 문장이 양진문장이라는 주장으로부터 ‘거짓말쟁이 문장은 참이다’도 양진문장이 되어 불필요하게 양진문장이 확장되기 때문이라고 말한다. 다시 말해서 거짓말쟁이 문장이 양진문장이라는 주장과 배타원리 (ii)를 받아들일 경우 ‘거짓말쟁이 문장이 참이다’도 양진문장이 되기 때문이다. 이는 다음과 같이 간단히 증명된다.

- ① $T(\langle \lambda \rangle) \wedge T(\langle \neg \lambda \rangle)$ (거짓말쟁이 문장은 양진문장이다.)
- ② $T(\langle \neg \lambda \rangle) \rightarrow \neg T(\langle \lambda \rangle)$ ((ii))

40) 이 주장은 프리스트가 시몬스(K. Simmons)와의 서신에서 제시한 것이다. Littmann & Simmons (2004), p. 318.

- ③ $T(\neg \lambda)$ (①의 $\wedge$ -제거)
- ④ $\neg T(\lambda)$ (②③의 MP)
- ⑤ $T(\lambda)$ (①의 $\wedge$ -제거)
- ⑥ $T(\lambda) \wedge \neg T(\lambda)$ (④⑤, $\wedge$ -도입)

프리스트는 “양진문장은 매우 제한적인 영역에서 발생”해야 하고, “모순은 필요 이상으로 증대되지 않아야 한다”고 주장하면서 배타 원리 (ii)를 거부하는 것이다.⁴¹⁾ 그런 점에서 양진주의의 이론 자체가 병리적이라는 점은 문제가 아닐 수 없다. 그럼에도 (A)가 양진문장이라는 것은 피할 수 없고, 초일관주의적 양진주의 이론 자체가 병리적인 셈이다. 과연 우리는 어떤 이론이 병리적인 주장을 포함하고 있음에도 그 이론을 받아들여도 되는가?

이와 유사하지만 약간 다른 비판을 보자. 흔히 양진주의의 표현가능성(expressibility) 문제라고 불리는 것인데, 파슨스(T. Parsons)는 이에 대해서 다음과 같이 말한다.

당신이 “ β ”라고 말하고 프리스트가 “ $\neg \beta$ ”라고 대답했다고 생각해 보자. 일상적인 상황에서는 당신은 그가 당신에게 동의하지 않는다고 생각할 것이다. 그러나 당신은 프리스트가 양진주의자라는 사실을 기억하고, 그가 궁극적으로 당신에게 동의할 수 있다는 생각이 들었다. 프리스트는 β 와 $\neg \beta$ 가 동시에 참이라고 생각할 수도 있기 때문이다. 어떻게 그는 자신이 정말로 당신에게 동의하지 않는다는 것을 나타낼 수 있을까? 자연스런 선택은 그가 “ β 는 참이 아니다”고 말하는 것이다. 그러나 이 주장의 참은 또한 ‘ β 가 참임’과 일관적이다. (...) 따라서 (...) 프리스트는 다른 사람의 견해에 동의하지 않음을 주장하는 데 어려움을 갖는다.⁴²⁾

이에 대하여 프리스트는 “ $\neg \beta$ ”를 주장하고 β 는 양진문장이 아니라고 주장하면 “ β ”에 대한 주장에 동의하지 않음을 표현할 수 있다고 말할 수도 있을 것이다. 그러나 파슨스가 지적하듯이, 그렇게 말하는 것은 일상적으로 “ β 는 참이면서 동시에 거짓은 아니다”고 말하는 것과 별반 다를 것이 없다. 그런데 β 가 양진문장일 경우는 이런 설명이 가능하지 않다. 다시 말해서 양진문장에 대한 어떤 메타적 진술에 대해서는 부동의를 표현하는 데 여전히 어려움에 직면할 수밖에 없을 것이다.

레셔와 브랜덤은 일관적이지 않은 대상언어와 그 대상언어에 대한 일관적인 담론을 구별함으로써 이 문제를 해결하고자 한다. 즉 대상언어 수준의 담론과 이론적인 메타 수준의 담론을 구별하면 대상언어에서 진리 술어와 관련하여 발생하는 비일관성은 메타언어의 수준으로까지 확장되지 않게 된다는 것이다.⁴³⁾ 이들의 해결책을 받아들이는 것은 거짓말쟁이 역설을 양진주의를 통해서 해결하려고 하는 것이라기보다는 언어의 위계에 의존하는 것이라고 해야 하고, 이는 진정한 의미에서 양진주의적 제안이라고 보기 어렵다.

프리스트는 레셔와 브랜덤의 해결책이 만족스럽지 않다고 생각한다. 그는 자신의 양진주의가 어떤 형태든지 대상언어와 메타언어의 구별을 요청하지 않으며, 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위해서 양진문장이 있다는 것 이외에 어떤 다른 수단에도 의존하지 않아야 한다고 믿기 때문이다.

또 (A)가 참이면서 동시에 거짓이라는 주장을 받아들인다는 것은, 양진주의 이론에 다음 두 문장이 포함되어 있다는 뜻이다.

41) Priest (2006a), p. 116.

42) Parsons (1990), p. 345.

43) Rescher & Brandom (1979), p. 138.

(A) (λ)는 참이면서 동시에 거짓이다.

(A') (λ)는 참이면서 동시에 거짓인 것은 아니다.

그렇다면 양진주의자들이 거짓말쟁이 문장에 대해서 정말로 주장하는 것은 무엇인가? 만약 양진주의자들이 (A)와 (A')을 모두 참으로 받아들인다면, 앞에서 지적했듯이, 주장과 부인에 관한 문제가 발생한다. 베르토(F. Berto)는 여러 가지 유형의 LNC를 정리하면서, 한 문장의 수용과 거부와 관련된 화용론적 정식(pragmatic formulation)을 제시한다.⁴⁴⁾ 베르토가 제시한 LNC의 화용론적 정식은 다음과 같이 표현되는데, 그것은 합리적 행위자라면 α를 수용하면서 동시에 α를 거부하는 것은 불가능함을 의미한다.

$\neg(\vdash \alpha \wedge \neg \alpha)$ [$\vdash$: 수용하다, $\neg$: 거부하다]

그런데 양진주의자들은 (A)를 주장(수용)할 뿐만 아니라, 결과적으로 (A)의 부정인 (A')도 수용해야 한다. (A)의 부정을 수용한다는 것은 (A)를 부인하는 것에 다름 아니므로, 결국 양진주의자들은 (A)를 수용함과 동시에 (A)를 거부하는 셈이고, 이는 합리적인 행위자라면 받아들일 수 없는 것이다. 양진주의자들은 예외적인 특별한 문장에 대해서는 그것의 부정을 수용함과 그것을 거부함이 구별되고 거짓말쟁이 문장이 바로 그러한 예외적인 특별한 문장이라고 주장할 수 있을 것이다.⁴⁵⁾ 일상적으로는 어떤 문장(α)의 부정, $\neg \alpha$ 를 주장하면서 그 문장을 부인하지 않는다는 것은 합리적이지 않은 것처럼 보이지만, 그것이 바로 거짓말쟁이 문장과 같은 병리적 문장이 갖는 기이성이라고 주장하는 셈이다. 그러나 문제는 그러한 기이성이 거짓말쟁이 문장에 국한되는 것이 아니라, 거짓말쟁이 역설에 대한 양진주의 이론 자체에까지 확장된다는 점이다. 즉 (A)의 부정을 주장하지만, (A)를 부인하지 않는다는 것은 거짓말쟁이 역설에 대해서 어떤 해결책을 제시하고 있는지 이해하기 어렵다.

참이면서 거짓인 문장이 있을 수 있다고 할지라도, 이론적 논쟁에서 그런 문장을 주장할 수는 없다. 왜냐하면 그러한 문장을 주장하는 것은 어떤 것도 주장하지 않거나 모든 것에 대해 동의한다고 해석될 수 있기 때문이다. 주장의 목적은 단지 참인 것을 주장하는 것이어야 하며, 양진문장은 주장을 할 수 있는 문장이 아니다. 이와 관련하여 브레머(M. Bremer)는 주장에 대한 적정조건을 다음 두 가지로 제시한다.

(i) 우리가 어떤 것을 제공하기 위해서는 그 이유를 언급하거나 정당화를 제공하여야 한다.

(ii) 어떤 정보가 언급될 가치가 있기 위해서는 그 정보를 수용함으로써 그 이후의 담론이나 행위에 차이를 낳을 수 있어야 한다.⁴⁶⁾

그러나 양진문장을 주장할 경우, 이러한 조건을 만족시키지 못한다. 양진문장, 'Θ'를 주장하면서 제공할 수 있는 어떤 근거나 정당화도 동시에 양진문장의 부정, ' $\neg \Theta$ '를 위한 근거나 정당화로 사용될 수 있기 때문에 양진문장을 주장하는 논증의 성공과 실패는 그 주장의 정

44) Berto (2006), p. 284.

45) Beall (2009)에서 볼은 이러한 취지로 반론에 답하고 있다. pp. 99~100.

46) Bremer (1999), p. 169.

당화와 아무런 관련이 없다. 따라서 어떤 문장이 양진문장 또는 모순적이라는 것을 알면서 그 문장을 주장하는 것은 그것의 부정을 주장하는 것보다 나을 수 없기 때문에 그런 주장을 할 수 없다. 브레머는 이런 점에서 “어떤 문장이 모순임을 알면서 그 문장을 주장하는 것은 연관성이라는 대화의 격률(conversation maxim of relevance)을 위반하는 것”이라고 말한다.⁴⁷⁾ 이러한 언어 행위와 관련된 화용론적 제한을 고려할 때, 어떤 것을 주장하는 것은 어떤 정당화에 의해서 수반되는 참된 믿음을 갖는 것 이상이다. 이러한 화용론적 제한 때문에 양진문장 또는 인식된 모순에 대해서는 주장 행위가 성립할 수 없다. 다시 말해서 어떤 모순을 증명했다고 할지라도 그것을 주장할 수는 없는 것이다. 그러므로 양진주의는 철학적 견해로서 적절하게 주장될 수 없다.

4. 복수의 문제

양진주의가 일상적인 직관에 반하는 듯한 주장을 하지만 여전히 매력적인 것처럼 보이는 중요한 이유 중 하나는, 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위해서 지금까지 제시된 거의 모든 견해들이 복수의 문제에 부딪히지만, 양진주의적 해결은 복수의 문제를 낳지 않는다는 것이었다. 그러나 양진주의적 견해도 새로운 형태의 복수의 문제를 낳는다. 양진주의에 따르면, 모든 문장은 참, 거짓, 참이면서 동시에 거짓이라는 세 가지 진리값 중 하나의 값을 갖는다. 그러므로 단지 거짓(only false)은 아니지만 거짓일 수 있는 문장이 있고, 또한 단지 거짓인 문장이 있을 수 있을 것이다. (“1+2=4”나 “2013년은 윤년이다.”와 같이 양진문장이 아닌 거짓인 문장이 단지 거짓인 문장의 예이다.) 그런데 단지 거짓임은 LP에서 어떻게 표현될 수 있는가?

앞에서 우리는 프리스트가 표현가능성의 문제에 부딪혀서 어떤 주장(β)에 대하여 동의하지 않음을 표시할 수 있기 위해서, “ β 는 양진문장이 아니면서 $\neg\beta$ 라고 주장”하면 된다고 답한다는 점을 지적했다. 다시 말해서 그는 “ β 가 단지 거짓”이라고 주장함으로써 β 에 대하여 동의하지 않음을 표시할 수 있다고 주장한 것이다. 그러면 “ β 는 단지 거짓이다”는 어떻게 그의 논리체계에서 표현될 수 있는지 살펴보자. ‘단지 거짓임’은 ‘양진문장이 아님’을 포함하고 있기 때문에, ‘단지 거짓임’을 표현하기 위해서 양진문장 연산자 ‘>’를 도입하자. [‘> β ’는 ‘ β 는 양진문장이다.’를 뜻한다.] 그러면 ‘ β 가 단지 거짓이다’를 표현하는 직관적인 방법은 ‘ β 가 양진문장도 아니고 참도 아니다’일 것이고 이는 다음과 같이 표현될 수 있을 것이다.

$$\neg >\beta \wedge \neg \beta$$

‘> β ’는 ‘ $\beta \wedge \neg \beta$ ’와 논리적으로 동치이므로, 그것을 포함한 복합명제의 진리값은 다음과 같이 될 것이다.

β	$\neg\beta$	$>\beta$	$\beta \wedge \neg\beta$	$\neg >\beta$	$\neg >\beta \wedge \neg \beta$
t	f	f	f	t	f
f	t	f	f	t	t

47) Bremer (1999), p. 170.

b	b	b	b	b	b
---	---	----------	----------	---	---

그런데 이 진리표를 통해서 우리는 ' $\neg\beta$ '가 ' $\neg>\beta \wedge \neg\beta$ '와 동치임을 알 수 있다. 다시 말해서 ' β 가 거짓임'이 ' β 가 단지 거짓임'과 동치가 되어버린다. 결국 거짓임과 단지 거짓임을 구별하고자 하는 의도를 충족시킬 수 없게 된다. 또한 ' β '가 양진문장일 경우에 ' $\neg>\beta \wedge \neg\beta$ '도 양진문장이므로, 양진문장에 대해서 '그 문장은 단지 거짓이다'는 진술도 양진문장, 즉 참이면서 동시에 거짓이 되어 버린다. 양진문장에 대해서 양진주의자들도 그 문장이 단지 거짓이라고 진술하는 것이 직관적이지 않다고 생각할 것이므로 '양진문장 β 는 단지 거짓'이라는 주장은 양진주의자들도 받아들일 수 없을 것이다.

그러나 ' $>\beta$ '는 ' β 는 양진문장이다'는 뜻이므로, ' β '가 양진문장일 때, ' $>\beta$ '는 참이라고 해야 직관적이라고 주장할지도 모르겠다. 이제 그 경우를 생각해보자. ' β '와 ' β '의 부정의 연언은 ' $>\beta$ '와 동치이므로, ' β '가 양진문장일 때 ' β '와 ' β '의 부정의 연언도 참이어야 한다. 그렇다면 또 다른 부정(negation) 기호가 필요하게 된다. 즉 어떤 문장이 양진문장일 때 그것의 부정도 또한 참이 되는 부정이 필요하게 되는데, 이를 대안적 부정이라고 하고 이를 ' $\neg$ '으로 표시하자. 대안적 부정문은 원래의 문장이 참일 때만 거짓이 되고, 그 외에는 참이 되는 연산자이다. 대안 부정의 연산자를 사용한 진리표는 다음과 같이 될 것이다.

β	$\neg\beta$	$\neg\beta$	$>\beta$	$\neg\beta \wedge \neg\neg\beta$	$\neg\beta \vee >\beta$
t	f	f	f	f	f
f	t	t	f	f	t
b	b	t	t	t	t

이 경우 ' $\neg\beta$ '는 ' $\neg\beta \vee >\beta$ '가 논리적으로 동치어서, β 가 양진문장이거나 참이 아님을 나타내고, ' $>\beta$ '는 ' $(\neg\beta \wedge \neg\neg\beta)$ '와 동치인데, 이것은 β 가 거짓이거나 양진적임과 β 가 참이거나 양진적임이 연언적으로 결합된 문장으로, 단지 참임과 단지 거짓임을 배제하여 양진문장을 적절하게 표현하고 있는 것 같다. 그리고 '단지 거짓임'은 ' $(\neg>\beta \wedge \neg\beta)$ '로, '단지 참임'은 ' $(\neg>\beta \wedge \neg\neg\beta)$ '로 나타낼 수 있다.⁴⁸⁾ 이렇게 대안적 부정을 도입하면 어떤 문장이 오직 참임과 오직 거짓임을 표현할 수 있게 된다.

이제 이 논리체계의 특징을 살펴보자. 우선 이 논리체계에서는 LP에서는 거부되었던 선언삼단 논법이 대안적 부정이 사용되면 타당하게 된다. 왜냐하면 위 진리표에 따르면, ' $(\beta \vee \neg\beta)$ '가 참을 값을 갖고 ' $\neg\beta$ '가 참의 값을 가지면 ' $\neg\beta$ '도 항상 참의 값을 갖게 되기 때문이다.⁴⁹⁾ 이 논리체계에서 ' $(\beta \vee \neg\beta)$ '는 논리적 참이고, $(\beta \wedge \neg\beta)$ 는 참일 수는 없다. 문제는 이 논리체계에서는 다시 복수의 문제가 발생한다는 것이다. 다음 문장을 생각해보자.

48) '단지 거짓'과 '단지 참' 이와 같이 표현될 수 있는 이유는 다음 진리표를 통해서 설명될 수 있다.

β	$(\neg>\beta \wedge \neg\beta)$	$(\neg>\beta \wedge \neg\neg\beta)$
t	f	t
f	t	f
b	f	f

49) 대안적 부정을 도입한 LP의 체계에서 ' $\alpha \rightarrow \beta$ '과 ' $\neg\alpha \vee \beta$ '를 동치라고 한다면, 이 경우 ' $[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta] \rightarrow \alpha$ '는 논리적으로 참이 되어 선언 삼단논법이 성립함을 보일 수도 있다.

(λ') 이 문장은 (λ')의 대안 부정이다.

(λ')이 가리키는 것은 ' $\neg\lambda'$ '이다. 따라서 (λ')이 참이라고 하면, ' $\neg\lambda'$ '이 참이 된다. 따라서

$$(가) T(\langle\lambda'\rangle) \rightarrow \neg\lambda'$$

이다. 또 (λ')의 대안 부정을 참이라고 가정하면, (λ') 말하는 것이 바로 그것이므로 (λ')이 따라 나온다. 즉,

$$(나) T(\langle\neg\lambda'\rangle) \rightarrow \lambda'$$

이다. 그런데 이 논리체계에서 ' $(\beta \vee \neg\beta)$ '은 논리적 참이므로 다음 식도 논리적 참이다.

$$(다) (\lambda' \vee \neg\lambda')$$

이로부터 역설이 어떻게 발생하는지 보자.

- ① $T(\langle\lambda'\rangle)$ (가정)
- ② $\neg\lambda'$ (①과 (가)의 MP)
- ③ λ' (①의 T-제거)
- ④ $\lambda' \wedge \neg\lambda'$ (②,③ $\wedge$ -도입)

그런데 이 논리체계에서 ' $(\beta \wedge \neg\beta)$ '는 참일 수 없는 문장이다. 따라서 ' $(\lambda' \wedge \neg\lambda')$ '도 참일 수 없고, 그것을 귀결하는 (λ')을 참이라고 가정하는 것은 불합리하다.

- ⑤ $T(\langle\neg\lambda'\rangle)$ (가정)
- ⑥ λ' (⑤와 (나)의 MP)
- ⑦ $\neg\lambda'$ (⑤의 T-제거)
- ⑧ $\lambda' \wedge \neg\lambda'$ (⑥,⑦ $\wedge$ -도입)

위와 마찬가지로 이유로 ' $\neg\lambda'$ '을 참이라고 가정하는 것도 불합리하다. 그러므로 ' λ' '와 ' $\neg\lambda'$ ' 어느 것도 참이라고 할 수 없다. (다)는 논리적 참인데, 그 선언문의 어떤 선언지도 참일 수 없다는 결론이 되어 모순이 발생한다.

원래의 LP의 체계에서 어떤 방식으로든 '단지 참'을 표현할 수 있다고 가정할지라도 복수의 문제에 부딪힌다는 것을 보일 수 있다.⁵⁰⁾

($\lambda\lambda$) 이 문장은 단지 거짓이다(This sentence is false only).

($\lambda\lambda$)를 참이라고 가정하자. 그런데 ($\lambda\lambda$)가 가리키는 것은 '($\lambda\lambda$)가 단지 거짓'이라는 것이므

50) 이에 대한 보다 자세한 논의는 Littmann & Simmons (2004), p. 322를 참고할 것.

로, $(\lambda\lambda)$ 는 단지 거짓이다. 따라서 $(\lambda\lambda)$ 는 참일 수 없다. 또 $(\lambda\lambda)$ 를 참이 아니라고 가정하자. 그러면 $(\lambda\lambda)$ 가 단지 거짓이라는 것이 참이 아니게 된다. 즉 $(\lambda\lambda)$ 는 참이거나 적어도 양진적이다. 어쨌든 $(\lambda\lambda)$ 는 참이 된다. 결국 $(\lambda\lambda)$ 를 참이라고 가정하면 참이 아님이 추론되어 귀류법에 의해서 참이 아님이 추론되고, $(\lambda\lambda)$ 를 참이 아니라고 가정하면 참이 추론되어 참이 되게 된다. 따라서 모순이 발생한다.

양진주의자들은 $(\lambda\lambda)$ 도 참이면서 거짓인 양진문장이라고 말할지도 모른다. 그러나 $(\lambda\lambda)$ 가 참이면서 거짓이라면, $(\lambda\lambda)$ 는 참이기도 하다. 그런데 $(\lambda\lambda)$ 가 참이라면, $(\lambda\lambda)$ 가 가리키는 것은 ‘ $(\lambda\lambda)$ 가 단지 거짓’이라는 것이므로, $(\lambda\lambda)$ 는 단지 거짓이다. 결국 양진주의자들은 $(\lambda\lambda)$ 를 양진문장이면서 동시에 단지 거짓인 문장이라고 말해야 한다. 그러나 ‘단지 거짓’이라는 의미는 참일 수 있음을 배제하고 오직 거짓의 진리값만을 갖는다는 의미이므로, 양진주의자는 다시 곤경에 처하게 된다.

4. 맺음말

지금까지의 논의를 정리해보면, 하나의 문장이 참이면서 동시에 거짓인 양진문장이 있다고 주장하는 초일관주의적 양진주의는 어떤 주장에 대해서 동의하지 않음을 표현할 수 없다는 화용론적 문제에 부딪힌다. 이러한 화용론적인 문제를 해결하기 위해서 ‘그 문장이 단지 거짓이다’고 주장할 수 있겠지만, 이는 다시 LP에서 적절하게 표현할 수 없거나, 적절하게 표현하기 위해서 LP를 수정하면 다시 복수의 문제에 부딪힌다. 결국 거짓말쟁이 역설을 해결하기 위해서 제시된 프리스트의 초일관주의 논리체계는 성공적이지 않으며, 그들이 주장과 달리 거짓말쟁이 문장을 LNC의 반례로 받아들여야 할 이유는 없어 보인다.

참고 문헌

- Beall, JC. (2009), *Spandrels of Truth*, Oxford: Clarendon Press.
- Berto, F. (2006), "Meaning, Metaphysics, and Contradiction," *American Philosophical Quarterly*, vol. 43, no. 4. pp. 283~297.
- Bremer, M. (1999), "Can Contradictions be Asserted?" *Logic and Logical Philosophy*, vol. 7, pp. 167~177.
- Littmann, G. & K. Simmons (2004), "A Critique of Dialetheism," in Priest, Beall, and Armour-Garb (2004), pp. 314~335.
- Parsons, T. (1990), "True Contradictions," *Canadian Journal of Philosophy*, vol. 20, pp. 335~354.
- Priest, G. (1979), "The Logic of Paradox," *Journal of Philosophical Logic*, 3. pp. 381~412.
- . (2006a), *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*, 2nd Ed. Oxford: Oxford University Press.
- . (2006b), *Doubt Truth to be a Liar*, Oxford: Oxford University Press.
- Priest, G. & JC. Beall, & B. Armour-Garb (2004), *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*, Oxford: Oxford University Press.
- Rescher, N. & R. Brandom (1979), *The Logic of Inconsistency*, Totowa: Rowman & Littlefield.
- Whittle, B. (2004), "Dialetheism, Logical Consequence and Hierarchy," *Analysis*, vol. 64, no. 4. pp. 318~326.
- Zalta, E. (2004), "In Defense of the Law of Non-Contradiction," Priest & Beall & Armour-Garb (2004), pp. 418~436.
- Zalta, E. & F. Berto, (2008), "Dialetheism," *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <http://plato.stanford.edu/entries/dialetheism/>

발 표 4:

“두 딸의 문제에 관한 대화”

발표자: 김한승 선생님(국민대), 김명석 선생님(국민대)

1. 두 딸의 문제

‘민수’라는 이름을 가진 사람을 처음 만나서 대화를 나누는 도중에 다음과 같은 질문(이하 ‘질문1’)을 받았다고 하자.

[질문1] “나에겐 두 명의 아이가 있습니다. 이 중 적어도 한 명은 딸입니다. 내 아이 두 명 모두 딸일 확률은 얼마일까요?”

이 질문에 대해서 당신은 다음과 같은 해법(이하 ‘해법1’)을 따라 그 답이 $1/3$ 이어야 한다고 생각한다.

[해법1] 두 아이를 성별과 순서에 따라 분류할 때, 있을 수 있는 경우는 (딸, 딸), (아들, 딸), (딸, 아들), (아들, 아들), 이렇게 네 가지이다. 임의의 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 각각 $1/2$ 로 동일하다고 하자. 이 때 위의 네 경우는 각각 동일한 확률을 갖고 있다고 보아야 한다. 그런데 우리는 민수의 두 아이 중에서 적어도 한 명은 딸이라는 것을 안다. 그렇다면 네 가지 가능한 경우 중 (아들, 아들)의 경우는 배제되어야 한다. 나머지 세 경우는 각각 동일한 확률을 갖고 있다. 두 아이가 모두 딸일 확률은 이 세 가지 경우 중 하나이므로, 구하고자 하는 확률은 $1/3$ 이어야 한다.

그런데 민수가 애초에 던졌던 질문과 유사하지만 한 가지 문장이 첨가된 다음 질문(이하 ‘질문2’)을 했다고 가정해보자.

[질문2] “나에겐 두 명의 아이가 있습니다. 이 중 적어도 한 명은 딸입니다. [지나가는 한 아이를 지칭하면서] 저 아이가 바로 내 딸입니다. 내 아이 두 명 모두 딸일 확률은 얼마일까요?”

이 질문에는 대해서 어떻게 답을 해야 할까? 다음과 같은 해법(이하 ‘해법2’)을 따르자면 그 답은 $1/2$ 이어야 한다.

[해법2] [질문2]에서 묻고 있는 확률은 질문자의 두 아이 중에서 질문자가 지칭하여 소개한 아이가 아닌 다른 한 명의 아이가 딸일 확률과 정확히 같다. 임의의 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 각각 $1/2$ 로 동일하므로 [질문2]에서 묻고 있는 확률은 $1/2$ 이다.

‘두 딸의 문제’는 위의 두 질문에 어떻게 답해야 하는가 하는 문제이다. 이 질문들에 대해 위에 제시된 각각의 해답에 동의하는가? 동의한다고 하자. 그렇다면 두 아이가 모두 딸일 확률이 두 질문에서 다르므로, 두 질문에는 서로 다른 정보가 포함되어 있다고 보아야 할 것이다. 그런데 새로운 정보의 후보가 될 수 있는 것은, 민수가 지나가는 아이를 지칭하며 ‘저 아이가 바로 내 딸’이라고 말한 것 밖에는 없다. 이 진술이 새로운 정보

라고 할 수 있는가?

이를 놓고 펼쳐질 수 있는 논쟁을 따라가 보도록 하자. 다음 장에 등장하는 두 사람(‘한’과 ‘명’)은 서로 다른 견해를 지지하기 위해서 논쟁을 벌인다. 이 과정에서 두 딸의 문제가 감추고 있는 직관과 견해의 충돌이 드러날 것이다.

2. 대화

한: 저는 [질문1]에는 [해법1]을 따라서 ‘ $1/3$ ’이라는 대답이, [질문2]에는 [해법2]를 따라서 ‘ $1/2$ ’이라는 대답이 주어져야 옳다고 생각합니다. 그 근거는 [해법1]과 [해법2]에서 설명된 바 그대로입니다.

명: 저랑 생각이 다르군요. 저는 [질문1]과 [질문2] 모두에게 ‘ $1/3$ ’이라는 대답이 주어지는 것이 옳다고 생각합니다. 구하고자 하는 확률은 두 경우 모두 $1/3$ 이라는 것이지요. 그 근거는 [해법1]에서 설명하고 있는 그대로입니다.

한: 그렇다면 당신은 [질문2]에 대해 제시된 [해법2]에 잘못된 부분이 있다고 여겨야 합니다. 하지만 [질문2]에 대해서 [해법2]를 제시하는 것은 너무 자연스럽습니다. 어떤 부분이 잘못이라는 것이죠?

명: 저는 [해법2]에 나오는 “임의의 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 각각 $1/2$ 로 동일하므로 [질문2]에서 묻고 있는 확률은 $1/2$ 이다”는 주장을 받아들일 수 없습니다. “임의의 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 각각 $1/2$ 로 동일하다”는 것은 받아들입니다. 하지만 이는 [질문2]에서 묻고 있는 확률이 $1/2$ 이라는 것을 함축하지 않습니다. 우리가 얻어야 하는 것은 “나머지 한 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 각각 $1/2$ 로 동일하다”는 것입니다. 나머지 한 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 동일하지 않습니다.

저는 [질문2]의 상황이 [질문1]의 상황에서 바뀐 것이 거의 없다고 생각합니다. 특히 나머지 한 아이가 딸일 확률을 계산하는 일에 관하여 추가된 정보는 전혀 없습니다. [질문2]에서 ‘지나가는 한 아이’는 첫째 아이인지 둘째 아이인지 알려져 있지 않습니다. 결국 [질문2]의 상황은 [질문1]에서 “이 중 적어도 한 명은 딸입니다”라고 말해준 상황과 같습니다. 지나가는 한 아이를 지칭하는 것이 확률 계산에 관련된 정보에 모종의 변화를 준다고 생각하시는지요?

한: 그렇습니다. 저는 지나가는 한 아이를 지칭하는 것이 모종의 정보 변화를 준다고 생각합니다. 이 변화된 정보가 무엇인지를 알아보기 전에 먼저 [해법2]에 대한 당신의 주장에 대해서 생각해 봅시다.

당신은 지칭된 아이가 아닌 나머지 한 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 동일하지 않다고 주장합니다. 아마도 그 나머지 한 아이가 딸일 확률은 여전히 $1/3$ 이라고 주장하겠지요. 하지만 과연 그런지 생각해 봅시다. 우선, 두 딸의 문제를 동전 던지기라는 확률의 전형적인 상황에 적용해 보겠습니다. 제가 두 개의 동전을 던지고 그 결과를 확인한 후, 그 결과를 알지 못하는 당신에게 이렇게 묻습니다. “두 동전 중 적어도 한 개는 앞면입니다. 두 동전 모두 앞면일 확률은 얼마입니까?” 두 동전의 문제는 [질문1]과 본질적으로 다르지 않습니다. 가능한 경우는 (앞면, 앞면), (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면), (뒷면, 뒷면). 이 중 적어도 한 개는 앞면이라고 했으므로 (뒷면, 뒷

면)의 경우는 배제합니다. 구하고자 하는 확률은 나머지 세 경우 중 하나일 확률과 같으므로 $1/3$ 입니다.

자, 이제 저는 당신에게 앞면이 나온 동전 하나를 보여줍니다. 이제 나머지 동전 하나도 앞면일 확률은 얼마입니까? 당연히 $1/2$ 입니다. 그리고 이 확률은 바로 두 동전이 모두 앞면일 확률과 같습니다. 이는 [질문2]에서 묻고 있는 확률과 본질적으로 다르지 않습니다. 그렇다면 어떻게 나머지 한 아이가 딸일 확률을 $1/2$ 가 아니라고 말할 수 있을까요?

그럼에도 불구하고 당신이 자신의 의견을 그대로 유지한다면, 좀 더 다른 방향에서 생각해 보기로 합시다. 두 딸의 문제를 해결하기 위해서 충분히 큰 규모의 표본 조사를 한다면 어떤 결과가 나올까요? 불행히도 이런 표본 조사를 실제로 한 적은 없었던 것 같습니다. 표본 조사를 하는 데 어려움 중 하나는 [질문2]에서 한 아이를 지칭하는 상황을 어떻게 표본 조사에 반영하느냐 하는 겁니다. 그래서 상황을 조금 수정하여 지나가는 아이를 지칭하는 것이 아니라 아이의 이름을 정해주는 것으로 질문을 변경해 봅시다. 즉, [질문2] 대신에 다음 [질문3]을 고려하는 겁니다.

- ① **[질문3]** “나에겐 두 명의 아이가 있습니다. 이 중 적어도 한 명은 딸입니다. 그리고 그 딸의 이름은 지나입니다. 내 아이 두 명 모두 딸일 확률은 얼마일까요?”

[질문2]과 [질문3] 사이의 차이는, 아이를 직접 가리켜서 지칭하는 것과 그 아이를 이름을 통해서 지칭하는 것 사이의 차이입니다. 저는 이 차이가 두 딸의 문제에서 다른 답변을 낳는 차이가 아니라고 생각합니다. 이렇게 [질문3]으로 문제를 설정한다면, 표본 조사를 하는 방법은 간단해 집니다. 우선, 두 명의 아이가 있는 부부들을 무작위로 선정합니다. 그리고 이들 중에서 두 아이가 모두 아들인 부부들은 제외한 후, 나머지 부부들 중에서 한 아이의 이름이 지나인 경우를 찾아냅니다. 우리가 찾고자 하는 것은 딸 아이 한 명의 이름이 지나인 부부들 중에서 두 아이가 모두 딸인 부부가 차지하는 비율입니다. 실제로 이런 표본 조사를 한 적은 없지만, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 이 값을 찾아본 결과는 이렇습니다.⁵¹⁾

- ② 여자 아이에게 ‘지나’라는 이름을 붙일 확률: 1%
- ③ 두 아이를 둔 부부: 100만 쌍
- ④ 이 부부들 사이에서 난 아이들 중 딸: 999,862명
- ⑤ 딸 아이를 적어도 한 명 둔 부부: 750,117 쌍
- ⑥ 두 아이가 모두 딸인 부부: 249,745 쌍
- ⑦ 지나란 이름의 딸 아이가 있는 부부: 10,084 쌍
- ⑧ 지나란 이름의 딸 아이가 있는 부부 중 두 아이가 모두 딸인 부부: 4,997 쌍

이 시뮬레이션 결과를 받아들이다면, [질문1]에 대한 대답은 $1/3$ 에 매우 가깝고 [질문3]에 대한 대답은 $1/2$ 에 매우 가깝다는 것을 알 수 있습니다. 즉, 당신이 주장하는

51) Blais (2010). 여기서는 ‘지나’라는 이름 대신 ‘Florida’라는 이름을 사용했다.

것과는 달리, 지나를 제외한 나머지 한 아이가 딸일 확률과 아들일 확률은 1/2로 동일하다는 것이지요.

명: 저를 무척 당혹스럽게 하시네요. 이 문제는 생각보다 어려운 문제이군요. 앞의 시뮬레이션은 흥미로운 점이 있습니다. 그것은 임의의 딸이 '지나'라는 이름을 갖게 될 확률 f 가 0으로 수렴할수록 [질문3]의 답변이 1/2로 수렴한다는 사실입니다. 나는 이 계산이 옳다고 생각합니다. 하지만 이 시뮬레이션은 우리를 속이는 측면이 있습니다. '지나'라는 이름이 매우 드물다고 가정해 봅시다. 이것은 그 아이가 매우 특별한 아이라는 것을 말해줍니다. 이것은 그 아이를 우주 속에서 거의 유일무이한 특별한 존재로 만들어 버립니다. 이 경우 나에게 주어진 물음은, 한 아이가 유일무이한 특별한 존재인 조건에서, 나머지 한 아이가 딸일 확률을 묻는 셈이 됩니다. 이 물음에 답은 1/2입니다. 다시 말해 '지나'라는 이름이 한 개별자를 몹시도 특별나게 만들어버릴 경우 주어진 물음 자체가 변경됩니다. 이것은 [질문3]은 [질문2]와 다르다는 것을 뜻합니다. 만일 내가 '지나'라는 이름이 몹시도 드문 이름이라는 것을 모른다고 가정해 봅시다. 이 경우 한 아이라 지나라는 이름을 갖는다는 정보는 나의 확률 계산에 아무런 영향을 끼치지 못할 것입니다. 이 경우 [질문3]은 [질문2]와 다를 바 없습니다.

한: '지나'란 이름이 드문 이름인지가 이 문제에서 어떤 역할을 할까요? 저는 이름의 희귀성은 아무런 역할을 하지 않는다고 생각합니다. 당신은 아이의 이름이 매우 드물다고 가정하는 것이 '그 아이가 매우 특별한 아이'이고 '우주 속에서 거의 유일무이한 특별한 존재'라는 것을 말해 준다고 했습니다. 하지만 각각의 인간은 모두 유일무이한 존재라고 해야 하지 않을까요?

이름의 희귀성이 아무런 역할을 하지 못한다는 점은 앞에 등장한 시뮬레이션에서도 드러납니다. 우리는 임의의 여자 아이가 '지나'라는 이름을 가질 확률을 1%라고 상정했습니다. 하지만 100명의 여자 중 한 명이 갖고 있는 이름을 우리는 '희귀한' 이름이라고 하지 않습니다. 우리나라의 경우를 살펴볼까요? 한 해 약 50만 명의 신생아가 태어나는데, 이 중 약 절반이 여자 아이입니다. 여자 아이 중 가장 흔한 이름으로 꼽히는 '서연'의 경우 약 3천 명 정도가 있습니다. 1%를 조금 넘지요. 남자 아이와 여자 아이를 통틀어서 1%를 넘는 이름은 찾아보기 힘듭니다. 다시 말해서, 시뮬레이션은 아주 흔한 이름을 가지고 이루어진 셈입니다.

1% 정도의 '흔한' 이름을 가지고도 1/2이라는 결론이 나온 이유는, 그 여자 아이가 '지나'라는 이름을 가졌기 때문이 아니라, 우리가 그 아이를 '지나'라는 이름으로 지칭하기 때문입니다. 그 아이를 '지나'라는 이름으로 지칭한다는 것은 그 아이를 '유일무이한 특별한 존재'로 여기고 있다는 것입니다. 누군가를 이름으로 부른다는 것은 그런 목적이 아닐까요? 한 사람을 손가락으로 가리켜 지칭하는 것도 동일한 목적, 즉 그 사람을 다른 사람과 구별하여 '유일무이한' 존재로 인식하려는 목적을 가진 행위입니다. 결국 [질문2]와 [질문3]은 그 점에서 동일합니다.

아주 흔한 이름이 있을 수 있겠지요. 여성의 10%, 아니 50%가 같은 이름으로 불리는 상황을 상상할 수 있습니다. '지나'가 그런 이름이라고 해 봅시다. 두 아이 모두 '지나'라는 이름으로 불리는 상황도 상상할 수 있습니다. 이런 상황에서는 이름으로 사람을 구별하는 데 곤란을 겪겠지요. 하지만 우리는 그런 곤란을 벗어날 여러 가지 방법을 찾아낼 수 있을 겁니다. 키가 큰 아이와 작은 아이를 구별하여 '큰 지나'와 '작은 지나'라는 두 이름을 만들어 내는 것도 그런 방법 중의 하나가 될 수 있겠지

요.

명: 두 딸의 문제는 처음 생각보다 훨씬 어려운 수수께끼를 포함하고 있는 것 같네요. 한 딸 아이의 이름이 지나인 조건에서 다른 아이가 딸일 확률을 엄밀하게 계산해 보았습니다. 민수의 두 아이 이름이 같을 수 있는 경우, 두 아이 가운데 적어도 하나가 딸이고 그 딸 아이 이름이 지나인 조건에서 다른 아이도 딸일 확률은 $(2-f)/(4-f)$ 입니다.⁵²⁾ (f 는 임의의 아이가 ‘지나’라는 이름을 가질 확률입니다.) 하지만 두 아이의 이름이 반드시 달라야 한다면 그 확률은 $1/2$ 이 됩니다.⁵³⁾

52) 계산에 필요한 명제는 다음과 같이 약칭하자.

민수의 첫째 아이가 딸이다. = $_1G$
 민수의 첫째 아이가 아들이다. = $_1B$
 민수의 둘째 아이가 딸이다. = $_2G$
 민수의 둘째 아이가 아들이다. = $_2B$
 민수의 첫째 아이 이름이 지나이다. = $_1F$
 민수의 둘째 아이 이름이 지나이다. = $_2F$
 민수의 두 아이 가운데 적어도 하나는 딸이다. = $_1G \vee _2G = (_1G \& _2G) \vee (_1G \& _2B) \vee (_1B \& _2G)$

또한 다음과 같이 가정한다.

$_1G$ 와 $_1B$ 는 서로 배타적이고, $_2G$ 와 $_2B$ 도 서로 배타적이다.
 $_1G$ 와 $_2G$ 는 서로 독립적이고, $_1F$ 와 $_2F$ 도 서로 독립적이다.

이제 우리는 다음과 같은 확률 값을 가정한다.

$\Pr(_1G) = \Pr(_1B) = \Pr(_2G) = \Pr(_2B) = 1/2$
 $\Pr(_1F) = \Pr(_2F) = f$

민수의 두 아이 가운데 적어도 하나가 딸인 조건에서, 다른 아이도 딸일 확률은 다음과 같다.

$\Pr(_1G \& _2G | _1G \vee _2G)$
 $= \Pr(_1G \& _2G | (_1G \& _2G) \vee (_1G \& _2B) \vee (_1B \& _2G))$
 $= \Pr(_1G \& _2G) / \Pr((_1G \& _2G) \vee (_1G \& _2B) \vee (_1B \& _2G))$
 $= \Pr(_1G \& _2G) / \{\Pr(_1G \& _2G) + \Pr(_1G \& _2B) + \Pr(_1B \& _2G)\} = 1/3$

이제 민수의 두 아이 가운데 적어도 하나가 딸이고 그의 딸 아이 이름이 지나인 조건에서, 다른 아이도 딸일 확률은 다음과 같다.

$\Pr(_1G \& _2G | (_1G \& _1F) \vee (_2G \& _2F))$
 $= \Pr(_1G \& _2G | (_1G \& _1F \& _2G \& _2F) \vee (_1G \& _1F \& _2G \& \sim_2F) \vee (_1G \& \sim_1F \& _2G \& _2F) \vee (_1G \& \sim_1F \& _2G \& \sim_2F) \vee (_1B \& _2G \& _2F))$
 $= \Pr(((_1G \& _1F \& _2G \& _2F) \vee (_1G \& _1F \& _2G \& \sim_2F) \vee (_1G \& \sim_1F \& _2G \& _2F)) / \Pr(((_1G \& _1F \& _2G \& _2F) \vee (_1G \& _1F \& _2G \& \sim_2F) \vee (_1G \& \sim_1F \& _2G \& _2F) \vee (_1G \& \sim_1F \& _2G \& \sim_2F) \vee (_1B \& _2G \& _2F) \vee (_1B \& _2G \& \sim_2F)))$
 $=$
 $\Pr(_1G \& _1F \& _2G \& _2F) + \Pr(_1G \& _1F \& _2G \& \sim_2F) + \Pr(_1G \& \sim_1F \& _2G \& _2F) / \{\Pr(_1G \& _1F \& _2G \& _2F) + \Pr(_1G \& _1F \& _2G \& \sim_2F) + \Pr(_1G \& \sim_1F \& _2G \& _2F) + \Pr(_1G \& \sim_1F \& _2G \& \sim_2F) + \Pr(_1B \& _2G \& _2F) + \Pr(_1B \& _2G \& \sim_2F)\}$
 $= \{f/4 + f(1-f)/4 + f(1-f)/4\} / \{f/4 + f(1-f)/4 + f(1-f)/4 + f/4 + f/4\} = (2f - f^2) / (4f - f^2)$
 $= (2-f) / (4-f)$

이처럼 f 가 0으로 가까이 가면 위 확률 값은 $1/2$ 로 수렴하고, f 가 1로 가까이 가면 위 확률 값은 $1/3$ 으로 수렴한다.

53) 우리가 $_1F$ 와 $_2F$ 를 서로 배타적인 것으로 가정할 경우 $\Pr(_1G \& _2G | (_1G \& _1F) \vee (_2G \& _2F))$ 는 다음과 같다.

이 두 가지 결과 모두 저에게 충격적입니다. 한 아이의 키가 다른 아이의 키를 제한하지 않습니다. 그래서 민수의 두 아이 가운데 적어도 하나가 딸이고 그 딸 아이 키가 170.000cm인 조건에서, 다른 아이도 딸일 확률은 $(2-h)/(4-h)$ 입니다. 여기서 h 는 한 아이의 키가 170.000cm일 확률입니다. 어떤 아이의 키가 170.000cm일 확률은 그다지 높지 않습니다. 이 확률이 0.01이라 계산해도 $(2-h)/(4-h)$ 는 0.4987이나 됩니다. 다시 말해 거의 1/2에 가깝습니다. 이것은 매우 이상한 현상입니다. 왜 딸 아이 키에 대한 정보를 제공해주는 것이 1/3에서 1/2로 확률을 변경하는 것일까요? 정말이지 키든 이름이든, 그것의 희귀성은 우리 물음에서 중요한 요소가 아닌 것 같아요. 거의 누구나 이름을 갖고 있고, 설령 없다 하더라도 임의로 이름을 붙일 수 있을 테니까요. 또한 거의 누구나 특정한 키를 갖고 있을 테니까요. 그의 키가 165.345968943cm라는 사실은, 비록 아무개가 이러한 키를 가질 확률은 매우 낮겠지만, 이러한 낮은 확률이 그를 특별한 존재로 만들지 못합니다. 제 견해를 지키기 위해서 이러한 확률 계산에서 f 를 1로 간주하는 것일 겁니다. 저는 지금 f 를 1로 간주하는 것이 무엇을 뜻하는지 생각 중입니다. 하지만 제 생각에도, 민수에게 딸아이가 있고 그 아이에게 귀속하는 어떤 속성이든 그 아이가 그런 속성을 가질 확률을 1로 간주하는 것은 몹시도 이상해 보입니다.

집안에서 아이들 이름은 서로 다르게 붙여주는 것이 마땅합니다. 이름처럼 한 아이의 속성이 다른 한 아이의 속성을 배제하는 경우, 우리가 구하는 확률은 1/2입니다. “둘 중에서 키가 더 크다”든지 “둘 중에서 더 뚱뚱하다”든지 하는 것들이 이런 경우에 해당합니다. 민수가 자기 딸에 대해 이러한 정보를 제공할 경우 확률은 1/3에서 1/2로 줄어들게 됩니다. 이것은 제가 f 를 1로 간주한다 하더라도 확률 1/3에서 1/2의 변화를 받아들여야 한다는 것을 뜻합니다.

이제 저에게 남은 선택은 세 가지가 있습니다. 하나는 확률 값 1/3을 유지하게 하는 새로운 공리를 도입하는 것이고, 다른 하나는 [질문1]에 대한 답을 1/2로 변경하는 것입니다. 나머지 하나는 [질문1]에는 1/3, [질문2]에는 1/2라고 답하고 이를 설명하는 것입니다. 당신은 이 중 셋째 대안을 선택할 텐데, 그대의 설명을 듣고 싶군요.

한: 두 가지 중요한 소식을 듣게 되었네요. 하나는 당신이 원래의 입장을 수정했다는 것이고, 다른 하나는 당신이 고생스럽게 계산해 낸 결과가 나의 입장을 잘 해명해 줄 수 있다는 것입니다. 나에겐 이 두 소식 모두 중요하면서도 좋은 소식이라고 해야겠습니다. 애초 당신은 [질문1]과 [질문2]에 모두 1/3이라는 답을 제시했지만 이제는 적어도 어떤 수정이 필요하다고 생각하게 되었습니다. 그 수정의 결과가 나의 생각과 같게 되길 바라지만, 중요한 것은 왜 셋째 대안을 선택해야 하는지 하는 질문에 답하는 것이겠지요.

그 질문에 답하기 위해서는 당신이 고생스럽게 계산한 결과가 나에게 왜 희소식인지를 설명하는 것이 좋을 것 같습니다. 당신은 민수의 두 딸의 이름이 모두 지나일 가능성을 배제하지 않는 경우와 그런 가능성을 배제하는 경우를 구분하였습니다. 그리고 전자의 경우 우리가 찾는 값이 $(2-f)/(4-f)$ 이고, 후자의 경우 그 값은 1/2이라는

$$\begin{aligned}
 & \Pr({}_1G \& {}_2G | ({}_1G \& {}_1F) \vee ({}_2G \& {}_2F)) \\
 &= \Pr({}_1G \& {}_2G | ({}_1G \& {}_1F \& {}_2G) \vee ({}_1G \& {}_2G \& {}_2F) \vee ({}_1G \& {}_1F \& {}_2B) \vee ({}_1B \& {}_2G \& {}_2F)) \\
 &= \Pr(({}_1G \& {}_1F \& {}_2G) \vee ({}_1G \& {}_2G \& {}_2F)) / \Pr(({}_1G \& {}_1F \& {}_2G) \vee ({}_1G \& {}_2G \& {}_2F) \vee ({}_1G \& {}_1F \& {}_2B) \vee ({}_1B \& {}_2G \& {}_2F)) \\
 &= \{ \Pr({}_1G \& {}_1F \& {}_2G) + \Pr({}_1G \& {}_2G \& {}_2F) \} / \{ \Pr({}_1G \& {}_1F \& {}_2G) + \Pr({}_1G \& {}_2G \& {}_2F) + \Pr({}_1G \& {}_1F \& {}_2B) + \Pr({}_1B \& {}_2G \& {}_2F) \} \\
 &= \{ \Pr({}_1F)/4 + \Pr({}_2F)/4 \} / \{ \Pr({}_1F)/4 + \Pr({}_2F)/4 + \Pr({}_1F)/4 + \Pr({}_2F)/4 \} = 1/2
 \end{aligned}$$

결과를 내놓았지요. 그런데 이런 질문을 던져 봅시다. 민수가 자신의 두 아이를 똑같이 ‘지나’라고 부르고 있는 상황이라고 해도, 그가 자신의 두 딸을 구별할 수 없을까요? 그렇지 않을 겁니다. 민수가 두 딸을 구별할 수 있다면, 그는 언제든지 ‘지나’라는 이름 대신에 서로 다른 두 이름을 이용해서 두 딸을 부를 수 있습니다. 당신이 지적한 대로 이름 대신에 그들의 신장을 나타내는 두 수를 이용할 수도 있겠지요. 이런 이유에서 나는 두 아이의 이름이 모두 지나일 가능성을 고려할 필요는 없다고 생각합니다. 결국 [질문3]에 대한 대답은 $1/2$ 라는 것이지요.

그런 이유에서 당신이 제시한 $(2-f)/(4-f)$ 이라는 대답은 훌륭합니다. 이 답은 범용적이라서 모든 질문을 답하는 데 사용될 수 있습니다. f 가 0이라면 우리가 찾는 대답은 $1/2$ 이고, f 가 1이라면 그 대답은 $1/3$ 이겠지요. f 의 값을 적절히 정하면 지금까지 등장한 모든 질문에 답할 수 있습니다. 문제는 f 가 의미하는 바가 무엇이나는 겁니다. 당신은 f 를 ‘민수의 한 딸이 지나라는 이름을 가질 확률’이라고 생각했습니다. 나는 이렇게 f 를 간주하는 것이 혼란을 준다고 생각합니다. 이미 말했지만, 문제는 ‘지나’라는 이름이 얼마나 희귀한지가 아닙니다. 우리가 관심을 가져야 하는 점은 ‘지나’라는 이름으로 민수의 아이를 구별할 수 있는가 하는 점입니다.

이렇게 물어 봅시다. 민수의 두 아이를 보고 누가 지나인지 구별할 수 있는 능력이 우리에게 있을까요? 만약 민수의 두 아이 중 한 명만이 딸이고 나머지 한 명은 영락 없는 남자로 보인다면, 우리는 두 아이 중 누가 지나인지에 대해서 어느 정도 확신을 할 수 있을 지도 모릅니다. 반면 두 아이가 모두 딸이라면, 우리는 누가 지나인지 확신할 수 없을 겁니다. 그런데 눈 여겨 보아야 할 점은, 그 어떤 경우라도 민수는 누가 지나인지 알고 있다는 것입니다. 이 점이 우리와 민수 간에 존재하는 중요한 차이점입니다. 만약 f 가 ‘아이의 키가 5m 이하일 확률’을 나타낸다고 생각해 봅시다. 이 경우 우리는 두 아이 중 누구의 키가 5m 이하인지를 알 수 있습니까? 당연히 두 아이 모두 5m 이하일 것이라는 점을 확신할 수 있습니다. 이 점에서 우리와 민수는 별다른 차이가 없습니다. 다시 말해서 ‘키가 5m 이하임’이라는 속성은 두 아이를 구별하는 데 기여할 수 없습니다. 이 경우 우리는 f 를 1로 간주할 수 있을 겁니다. f 가 ‘아이임’이라는 속성을 나타낸다면 어떨까요? 당연히 우리는 민수의 두 아이가 ‘아이임’을 알 수 있지요. 두 가지 점에서 우리는 민수와 다를 바 없습니다. 하나는, 두 아이가 모두 아이라는 점을 확신한다는 것이고, 다른 하나는, ‘아이임’이라는 속성만을 통해서는 두 아이를 구별할 수 없다는 겁니다. 이는 [질문1]에서 제시되고 있는 상황입니다. f 를 1로 간주해야 하는 상황이지요. 따라서 [질문1]에 대한 대답은 $1/3$ 이 되는 겁니다.

그렇다면 [질문3]과 관련해서 f 는 어떻게 이해되어야 할까요? 이미 말했듯 중요한 점은, 두 아이 중 누가 ‘지나’란 이름을 가진 딸인지를 확인하는 데 있어서 민수와 우리의 인식적 처지가 서로 다르다는 겁니다. 우리는 두 아이 중 누가 지나인지 확신하기 어렵습니다. 둘 다 딸이라면 우리는 누가 지나인지 알 수 없기 때문이지요.⁵⁴⁾ 따라서 두 아이 중 적어도 한 명이 딸이며 ‘지나’라는 이름을 갖고 있다는 정보는 우

54) 물론 우리도 두 아이를 본다면 어떤 의미에서 이 둘을 구별할 수 있다. 분명히 두 아이는 어떤 구별되는 특성을 갖고 있을 것이기 때문이다. 하지만 ‘두 아이를 본다면 이 둘을 구별할 수 있는 능력이 있다’는 것과 ‘두 아이를 보기 전에 이 둘을 구별하는 능력이 있다’는 것은 다르다. 민수는 두 능력을 갖고 있지만 우리는 전자의 능력만을 갖고 있다.

리에게 두 아이 중 한 명의 딸이 5 m 이하의 신장을 갖고 있다는 정보와 다를 바 없고, 두 아이 중 한 명의 딸이 아이라는 정보와도 다를 바 없습니다. 다시 말해서 f 를 1로 간주해야 하는 상황입니다. 이는 [질문1]의 상황과 다르지 않지요.

하지만 우리가 민수의 관점을 취한다면 상황은 달라집니다. 민수는 당연히 둘 중 누가 지나인지 구별할 수 있습니다. 그렇기 때문에 그는 두 아이 중 적어도 한 명은 딸이고 그 아이의 이름은 지나라고 말할 수 있었겠지요. 여기서 중요한 선택의 여지가 우리에게 주어집니다. 하나의 선택은, 우리가 민수의 관점에 서는 것입니다. 즉, 우리는 민수가 ‘지나’라는 이름을 통해서 두 아이를 구별할 수 있다는 것을 받아들이고 우리 역시 민수처럼 그런 능력이 있는 척할 수 있습니다. 우리에게엔 사실 그런 능력이 없지만, 우리가 민수의 진술을 진지하게 받아들인다면, 우리에게도 민수처럼 그런 능력이 있다고 여기는 것은 아무런 해가 될 것이 없습니다. 또 하나의 선택은, 민수의 관점을 취하지 않고 우리의 관점을 유지하는 겁니다. 즉 ‘지나’란 이름으로 두 아이를 구별할 수 있는 능력이 우리에게 없다고 보는 겁니다. 두 가지 선택 모두 우리에게 열려 있습니다. 어느 쪽도 인식적으로 합당치 못한 대안이라고 할 수 없지요.

그러나 우리에게엔 사실 없지만 있는 것처럼 여길 수 있는 민수의 능력에는 제한이 있습니다. 우리가 고려하고 있는 질문들 모두에 대해서 민수는 ‘1’ 또는 ‘0’이라는 확률을 제시할 수 있습니다. 민수는 자신의 두 아이가 모두 딸인지 아닌지 알고 있기 때문이지요. 민수는 그런 능력이 있어요. 하지만 우리가 그런 능력을 가진 척해서는 안 됩니다. 민수는 우리가 그런 능력을 갖고 있는 척할 수 있는 정보를 제공하지 않았기 때문입니다. 그런 점에서 ‘우리가 민수의 관점을 취한다’고 말할 때에는 ‘민수가 실제로 갖고 있는 관점에 온전히 선다’는 의미가 아니라 ‘우리에게 인식적으로 허용된 지점까지 민수의 관점을 취한다’고 이해되어야 합니다. 그런 식으로 우리가 민수의 관점에 선다면, f 를 0으로 보아야 하고 따라서 우리가 찾는 값은 $1/2$ 이 됩니다.

이 정도의 설명으로 내가 말하고자 하는 바가 잘 전달이 되었는지 모르겠습니다. 필요하다면, 좀 더 명확하게 설명하도록 하겠습니다. 어쨌든 내가 말하고 싶은 바는 이렇습니다. 당신이 제시하는 f 에 대한 규정은 수정되어야 한다는 거죠. f 는 ‘민수의 아이가 지나라는 이름을 가질 확률’로 이해해서는 안 됩니다. 오히려 f 는 ‘지나라는 이름을 통해서 두 아이를 구별할 수 없을 확률’과 같이 이해되어야 합니다. 이렇게 이해될 때 f 는 누구의 관점을 취하는냐에 따라서 그 값이 달라질 수 있습니다. 우리가 우리의 관점을 유지한다면 f 는 1로 간주되는 것이 맞고, 우리가 민수의 관점을 취한다면 f 는 0으로 간주되는 것이 맞습니다.

이런 설명이 어떻게 적용되는지를 보여주기 위해서 두 딸의 문제에 대한 다음과 같은 해법을 고려해 봅시다.

“민수의 두 아이를 a와 b라고 하자. a가 딸이거나 b가 딸이라는 것이 알려졌다. 이제 a가 딸이라고 하자. 그렇다면, 우리가 찾는 확률은 b가 딸일 확률이다. 이 확률은 $1/2$ 이다. 또 b가 딸이라고 하자. 그렇다면, 우리가 구하는 확률은 a가 딸일 확률이다. 이 확률 역시 $1/2$ 이다. 따라서 양도 논법에 따라서 우리가 구하는 확률은 $1/2$ 이다.”

우리는 이 해법을 ‘양도 논법에 의한 해법’이라고 부를 수 있을 겁니다. 양도 논법에 의한 해법은 매우 그럴 듯해 보이죠. 하지만 여기에는 한 가지 암묵적 전제가 깔려 있습니다. 바로 우리가 두 아이를 ‘a’와 ‘b’라는 이름을 통해서 구별할 수 있다는 겁니다. 하지만 이 두 이름은 우리가 편의상 붙였을 뿐, 우리가 어느 쪽이 a이고 어

느 쪽이 b라고 말하는 것은 무의미합니다. 이 두 이름을 가지고 두 아이를 구별할 수 없기 때문이지요. 그런 점에서 양도 논법에 의한 해법은 인식적으로 허용되지 않은 관점을 취하는 잘못을 저지르고 있다고 할 수 있습니다.

나의 설명에 대해서 어떻게 생각하나요? 동의한다면, 이런 식의 설명이 다른 사례에도 적용될 수 있는지 없는지를 확인하기 위해서 다른 사례를 찾아 논의를 계속했으면 합니다.

명: 우리의 대화에 큰 열매가 맺힌 것 같아 저도 기쁩니다. 우리가 두 가지 관점을 취할 수 있고 관점에 따라 확률 값이 달라질 수 있다는 당신의 주장은 매우 놀랍고 흥미롭습니다. 관련 정보뿐만 아니라 관점도 확률 값을 바꿀 수 있다니 정말 흥분되는 주장입니다. 저는 그대가 언급한 ‘관점’이 정확히 무엇인지 이해하려고 노력했습니다.

정말 우리가 두 가지 관점을 취할 수 있다고 가정해 봅시다. 이 경우 우리는 확률 값이 보다 높은 쪽을 선택해야 한다고 생각합니다. 왜냐하면 우리는 확률 계산에서 입수할 수 있는 정보들과 관점들을 모두 동원해야 하기 때문입니다. 입수 가능한 단서를 사용하지 않을 자유가 우리에게 있겠지만 그러한 자유는 인식론상 오류로 이끌게 될 것입니다.

이른바 ‘양도논법에 의한 해법’은 저도 제 친구로부터 들었습니다.⁵⁵⁾ 그대는 이 논법의 오류를 지적하면서 이 논법이 “우리가 두 아이를 ‘a’와 ‘b’라는 이름을 통해서 구별할 수 있다”를 가정하고 있다고 말씀합니다. 저는 오히려 이 논법이 “두 아이는 구별되는 개별자이다”를 가정하고 있는 듯합니다. 이는 매우 합당한 가정이고 거짓일 수가 없습니다. 나아가 우리 앞에 두 아이가 놓여 있다면 우리는 둘의 차이를 식별할 수 있습니다. 만일 두 아이가 구별되는 두 개별자라면 우리는 둘에게 서로 다른 고유명사를 붙여줄 수 있습니다. 그 임의의 고유명사가 바로 a와 b인 것입니다. 키가 더 큰 아이를 a라고 부르든, 더 작은 아이를 a라고 부르든, 그 양도논법의 계산 결과는 달라지지 않을 것입니다. 민수의 두 아이는 분명 구별되는 두 개별자입니다. 왜냐하면 세상에는 구별불가능한 두 개별자가 존재할 수 없기 때문입니다. 따라서 우리는 두 아이에게 임의로 각각 a와 b를 이름을 줄 수 있습니다. 이것은 결국 민수의 관점을 취하는 것이고, [질문1]의 답변은 1/2라고 생각해야 합니다.

저에게 세 가지 선택이 남아 있다고 말씀 드렸습니다. 하지만 [질문1]에 대한 답이 1/3이라는 것은 저에게 너무나 명백합니다. 저는 이 물음에 대한 답을 1/2로 변경하는 안을 선택할 수 없습니다. 나아가 저는 [질문1]에서 [질문2]로 바뀔 때 따라 확률이 1/3에서 1/2로 바뀌는 것을 도무지 설명할 수 없었습니다. 악몽을 꾸었으며 꿈에서 깬 뒤 [질문2]나 [질문3]을 새로운 방식으로 바라보았습니다.

다시 동전 예로 돌아가겠습니다. 다음 세 가지 물음을 생각해 봅시다.

55) 박일호와 개인 대화. 그는 “민수에게 두 아이가 있고 둘 가운데 적어도 하나가 딸이다”를 “ $\exists xDx$ ”로 번역했고 “나에게 두 아이가 있고 둘 모두 딸이다”를 $\forall xDx$ 로 번역했다. 여기서 ‘Dx’는 ‘x가 나의 딸이다’이고, 양화사 x의 논의 구역은 민수의 두 아이 a와 b에 한정된다. 양화사의 논의 구역 때문에 “ $\exists xDx$ ”는 “ $Da \vee Db$ ”와 동치이고 “ $\forall xDx$ ”는 “ $Da \& Db$ ”와 동치이다. 박일호는 다음과 같은 계산 결과를 내어 놓았다.

- (i) $\Pr(Da \& Db | Da \vee Db) = 1/3$;
- (ii) $\Pr(Da \& Db | Da) = 1/2$;
- (iii) 만일 $Da \vee Db$ 이라면, $\Pr(Da \& Db) = 1/2$;
- (iv) 만일 Da 이라면, $\Pr(Da \& Db) = 1/2$.

[동전1] 10원짜리 동전을 두 개를 던졌습니다. 둘 가운데 적어도 하나가 앞면이 나왔습니다. 나머지 하나가 앞면이 나왔을 확률은 얼마일까요?

[동전2] 10원짜리 동전을 두 개를 던졌습니다. 제가 하나를 손으로 가렸지만 나머지 하나는 보시다시피 앞면이 나왔죠? 눈으로 직접 확인해 보세요. 그렇다면 제가 손으로 가리고 있는 이 동전도 앞면이 나왔을 확률은 얼마일까요?

[동전3] 10원짜리 동전 하나와 100원짜리 동전 하나를 던졌습니다. 제가 하나를 손으로 가렸지만 나머지 하나는 보시다시피 앞면이 나왔죠? 눈으로 직접 확인해 보세요. 그렇다면 제가 손으로 가리고 있는 이 동전도 앞면이 나왔을 확률은 얼마일까요?

이제 저는 위 세 물음에 대한 답변이 모두 $1/3$ 이어야 한다고 주장할 것입니다. 여태 많은 사람들은 [동전2]와 [동전3]의 답변이 $1/2$ 라고 주장했습니다. 이런 주장은 [질문2]와 [질문3]의 답변이 $1/2$ 이어야 한다는 주장과 그 직관과 통찰을 공유하고 있습니다.

[동전2]를 생각해 봅시다. 민수가 10원짜리 동전을 두 개 던지면 각 $1/4$ 의 확률로 (앞면, 앞면), (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면), (뒷면, 뒷면)이 나오게 될 것입니다. 순서쌍에서 왼쪽 항은 민수 시각에서 보다 왼쪽에 떨어진 동전의 결과를 말하고 순서쌍에서 오른쪽 항은 민수 시각에서 보다 오른쪽에 떨어진 동전의 결과를 말합니다. 이제 민수가 [동전2]처럼 물을 수 있는 경우는 3가지입니다. 하지만 우리가 손으로 가려진 동전이 앞면이라고 생각한다면 세 경우 가운데 오직 하나만 맞게 답한 것입니다. 따라서 [동전2]에 대한 답변은 $1/3$ 이어야 합니다.

이제 [동전3]을 생각해 봅시다. 민수가 10원짜리 동전 하나와 100원짜리 동전 하나를 던지면 각 $1/8$ 의 확률로 (10원 앞면, 100원 앞면), (100원 앞면, 10원 앞면), (10원 앞면, 100원 뒷면), (100원 앞면, 10원 뒷면), (10원 뒷면, 100원 앞면), (100원 뒷면, 10원 앞면), (10원 뒷면, 100원 뒷면), (100원 뒷면, 10원 뒷면)이 나오게 될 것입니다. 이제 민수가 [동전3]처럼 물을 수 있는 경우는 6가지입니다. 하지만 우리가 손으로 가려진 동전이 앞면이라고 생각한다면 여섯 경우 가운데 오직 둘만 맞게 답할 것입니다. 따라서 [동전3]에 대한 답변은 $1/3$ 이어야 합니다.

[동전3]과 같은 물음이 주어질 경우, 우리는 10원짜리 동전이든 100원짜리 동전이든 하나가 앞면이 나온 것을 보게 될 것입니다. 만일 우리가 10원짜리 동전이 앞면이 나온 것을 보게 될 경우, 우리는 다음과 같은 물음에 답하려고 애쓸 것입니다. 10원짜리가 앞면이 나왔을 조건에서 민수 손에 가려진 100원짜리 동전도 앞면이 나왔을 확률은 얼마인가? 이 물음의 답변은 $1/2$ 입니다. 만일 우리가 100원짜리 동전이 앞면이 나온 것을 보게 될 경우, 우리는 다음과 같은 물음에 답하려고 애쓸 것입니다. 100원짜리가 앞면이 나왔을 조건에서 민수 손에 가려진 10원짜리 동전도 앞면이 나왔을 확률은 얼마인가? 이 물음의 답변은 $1/2$ 입니다. 하지만 이 두 물음은 [동전3]이 묻고 있는 물음이 아닙니다. $1/2$ 이라고 나온 답변은 다음과 같은 물음에 대한 답변입니다.

[동전2*] 10원짜리 동전을 두 개를 던졌습니다. 제가 어떤 동전을 가릴까요? 왼쪽에 떨어진 동전을 가리라고요? 알았습니다. 왼쪽을 가리겠습니다. 이렇게 왼손으로 왼쪽 동전을 가렸지만 보시다시피 오른쪽에 떨어진 동전은 앞면이 나왔습니다. 그렇다면 제가 왼손으로 가리고 있는 이 동전도 앞면이 나왔을 확률은 얼마일까요?

[동전3*] 10원짜리 동전 하나와 100원짜리 동전 하나를 던졌습니다. 제가 어떤 동전을 가릴까요? 10원짜리 동전을 가리라고요? 알았습니다. 10원짜리 동전을 가리겠습니다. 이렇게 10원짜리를 손으로 가렸지만 보시다시피 100원짜리 동전은 앞면이 나왔습니다. 그렇다면 제가 손으로 가리고 있는 이 10원짜리 동전도 앞면이 나왔을 확률은 얼마일까요?

우리는 [동전2]와 [동전2*]을 혼동하고 있고, [동전3]과 [동전3*]을 혼동하고 있습니다. 마찬가지로 우리는 다음 두 물음을 구별해야 합니다.

[아이2] 저에게는 아이가 둘 있습니다. 키가 더 큰 아이가 딸이죠. 그렇다면 키가 더 작은 아이도 딸일 확률은 얼마일까요?

[아이2*] 저에게는 아이가 둘 있습니다. 키가 더 큰 아이와 더 작은 아이 가운데 하나를 정하세요. 키가 더 큰 아이요? 알겠습니다. 당신이 고른 키가 더 큰 아이는 딸입니다. 그렇다면 키가 더 작은 아이가 딸일 확률은 얼마일까요?

[아이2*]의 답변은 $1/2$ 이지만 [아이2]의 답변은 $1/3$ 입니다. 당신의 표현을 빌리면 민수 관점을 취한다는 것은 [아이2]를 [아이2*]로 이해한다는 것입니다. 또한 우리는 다음 두 물음을 구별해야 합니다.

[아이3] 저에게는 아이가 둘 있습니다. ‘하늘’이라는 이름을 가진 아이가 딸이죠. 그렇다면 다른 아이도 딸일 확률은 얼마일까요?

[아이3*] 저에게는 아이가 둘 있습니다. 아이들 이름은 ‘하늘’과 ‘누루’입니다. 둘 가운데 하나를 정하세요. 하늘이요? 알겠습니다. 당신이 고른 하늘은 딸입니다. 그렇다면 누루도 딸일 확률은 얼마일까요?

[아이3*]의 답변은 $1/2$ 이지만 [아이3]은 $1/3$ 입니다. 민수 관점을 취한다는 것은 [아이3]을 [아이3*]로 이해한다는 것입니다.

[아이2]과 [아이2*], [아이3]과 [아이3*]의 차이는 명백합니다. [아이3*]은 물음 자체에서 [아이3]이 배제시키지 못하는 가능성을 배제하고 있습니다. 우리가 하늘과 누루 중에서 아무렇게나 고른 하늘이 딸이라는 사실 때문에, 만일 하늘이 아들이었다면 우리에게 [아이3*]을 묻지 못했을 것입니다. 하지만 [아이3] 식의 물음을 던질 경우, 만일 하늘이 아들이었다면, “저에게는 아이가 둘 있습니다. ‘누루’라는 이름을 가진 아이가 딸이죠. 그러면 다른 아이도 딸일 확률은 얼마일까요?”라고 물음을 변경할 수 있습니다. 민수는 이런 자유를 [아이3*]에서 누릴 수 없지만 [아이3]에서 누릴 수 있습니다. 이러한 자유 때문에 [아이3]의 답변은 $1/2$ 이 아니라 $1/3$ 이 되는 것입니다. 우

리가 [아이3] 또는 [질문3]에서 민수가 이런 자유가 없다고 착각했기 때문에 $1/2$ 이라고 잘못 계산한 것입니다. [동전2]를 묻는 사람은 어느 쪽 손이든 가릴 자유가 있으며, 그는 (앞면, 앞면), (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면) 상황에서 [동전2]를 자유롭게 물을 수 있습니다. 하지만 [동전2*]를 묻는 사람은 그런 자유가 없으며, 그는 (앞면, 앞면), (뒷면, 앞면) 상황에서 [동전2*]를 물을 수 있을 뿐입니다. 그는 그만큼 자유를 잃었으며, 우리는 $1/3$ 이라는 다소 불확실한 상황에서 $1/2$ 이라는 보다 확실한 상황으로 옮겨 갈 수 있습니다.

[동전2]를 묻는 사람에게 자유를 빼앗아버리는 방식으로 물음을 이해할 때 [동전2]는 [동전2*]로 바뀌고 확률은 $1/3$ 에서 $1/2$ 로 바뀌는 것입니다. 그대가 말한 ‘민수의 관점’이란 민수에게 자유를 빼앗아버리는 방식으로 그의 물음을 이해하는 것이 아닐까요? 내가 민수의 [물음3]을 “민수의 두 아이 가운데 적어도 하나는 딸이다. 적어도 하나 존재하는 민수의 딸 이름을 ‘지나’라고 하자. 그러면 다른 아이도 딸일 확률은?”로 이해할 경우 [물음3]의 답은 $1/3$ 입니다. 하지만 민수의 [물음3]을 “민수의 두 아이 가운데 적어도 하나는 딸이다. ‘지나’라는 이름을 가진 바로 그 아이가 민수의 딸이었다. 그러면 다른 아이도 딸일 확률은?”로 이해할 경우 [물음3]의 답은 $1/2$ 입니다. 후자로 이해하는 것은 [물음3]을 [아이3] 식이 아니라 [아이3*] 식으로 이해하는 것입니다.

한: 그대가 다시 $1/3$ 이라는 원래의 대답으로 돌아갔다는 것은 분명 아쉬운 소식입니다만, 당신의 설명을 듣고 나니 오히려 그대의 의견이 나의 의견에 가까워졌다고 생각하게 되었습니다.

당신이 제시한 여러 상황에 대해서 말하기 전에 좀 더 분명하게 해 둘 구분이 있습니다. 이전에도 이 구분을 설명하고자 했는데 다시 한 번 분명하게 해 둘 필요가 있어 보입니다. 그 구분이란 ‘실제로 구별할 수 있음’과 ‘구별할 수 있는 능력이 있음’ 사이의 구분입니다. 어찌 보면 똑같은 상태를 기술하는 두 표현처럼 보이지만, 우리의 논의를 위해서는 이 둘을 구분하는 것이 중요합니다. 민수의 두 아이를 예로 들어 봅시다. 우리는 처음 만난 민수로부터 자신에게는 두 아이가 있다는 소식을 들었습니다. 우리는 이 둘을 구별할 수 있을까요? 분명 우리에게서 이 둘을 ‘구별할 수 있는 능력’이 있습니다. 다시 말해서 우리가 이 두 아이를 여러 번 만난다면, 두 아이의 구별되는 특징을 이용해서 아마도 이 둘을 궁극적으로 구별하는 데 성공할 겁니다. 두 아이가 일란성 쌍둥이인 경우이라고 하더라도, 두 아이를 구별하는 데 간혹 실패하는 경우도 있겠지만, 궁극적으로는 이 둘을 구별해낼 수 있는 특성을 찾거나 심지어 만들어 낼 수 있을 겁니다. 하지만 지금 당장 우리에게 이 둘을 실제로 구별할 수 있는 특성을 알고 있는지를 묻는다면, 그에 대한 대답은 ‘아니오’여야 합니다. 우리는 민수에게 두 아이가 있다는 사실만 들었을 뿐이고, 이 둘을 구별하는 특성에 대해서는 들은 바 없기 때문입니다. 그런 점에서 우리는 이 둘을 ‘실제로 구별할 수’ 없습니다. 다시 말해서 우리는 민수의 두 아이를 ‘구별할 수 있는 능력’은 갖고 있지만 이 둘을 ‘실제로 구별할 수’는 없습니다. 반면 민수는 우리와 다릅니다. 그는 자신의 두 아이를 구별할 수 있는 능력을 갖고 있을 뿐 아니라 실제로 이 둘을 구별할 수 있습니다.

민수가 자신에게 ‘지나’란 이름의 딸아이가 있다는 것을 추가로 밝혀도 마찬가지입니다. 우리가 민수의 두 아이를 만나게 되어 대화를 나누게 된다면, 둘을 구별할 수

있게 될 겁니다. 그런 의미에서 우리는 두 아이를 ‘구별할 수 있는 능력’이 있습니다. 우리가 이 둘을 구별하는 데 ‘지나’라는 이름도 분명 도움을 줄 수 있을 겁니다. 하지만 지금 당장 두 아이를 만나자마자 어느 아이가 지나인지를 우리가 구별해 낼 수는 없습니다. 우리에게는 두 아이를 ‘구별할 수 있는 능력’은 있으나 우리가 이 둘을 ‘실제로 구별할 수’는 없습니다.

그런데 지나란 딸아이가 있다는 것을 밝히는 경우와 그렇지 않은 경우 사이에는 중요한 차이가 있습니다. 즉, 두 아이 중 적어도 하나가 딸이라는 사실만 밝힌 경우 민수는 우리에게 두 아이를 구별할 아무런 수단도 주지 않은 셈이지만, 지나란 딸이 있다는 것을 추가로 밝힌 경우에는 두 아이를 구별할 수단을 주고자 한 셈이지요. 내 생각으로는, 바로 그 점 때문에 우리가 민수의 관점을 취하는 것이 허용되는 겁니다.

이런 경우를 생각해 봅시다. 민수가 아직 한 명의 아이도 없는 상황입니다. 그런데 그는 (무슨 이유이든) 자신이 매우 신뢰하는 예언자로부터 자신이 미래에 두 명의 아이를 갖게 될 것이며 이 중 적어도 한 명은 딸이라는 예언을 듣게 됩니다. 민수는 이 예언자를 매우 신뢰하기 때문에, 자신은 두 명의 아이를 두게 될 것이고 이 중 적어도 한 명은 딸이라는 점을 강하게 확신합니다. “그렇다면 내 두 아이가 모두 딸인 확률은?” 이렇게 민수는 자신에게 묻습니다. 이런 상황이라면 그 답은, 그대도 생각하듯이, 1/3입니다. 이 경우 민수와 우리는 인식적 상황에서 다를 바가 없습니다. 민수는 (두 아이가 태어나기 전이므로) 실제로 이 둘을 구별할 수는 없습니다. 우리와 마찬가지로.

내가 말하고자 하는 점을 또 다른 방식으로 서술하자면, ‘적어도’라는 표현이 사용되는 서로 다른 두 가지 맥락이 있다고 할 수 있습니다. “둘 중 적어도 한 명은 딸이다.”는 진술을 사용하는 맥락에는 두 가지 유형이 있습니다. 하나는, “둘 모두 딸이다.”거나 “둘 중 하나만 딸이다.” 중에서 어느 하나를 확정적으로 알고 있는 맥락이고, 다른 하나는 그렇지 못한 맥락입니다. 실제로 두 아이의 아빠인 민수는 둘 모두 딸인지 아니면 둘 중 하나만 딸인지를 알고 있으면서 그 정보를 감추고 있습니다. 반면 우리는 민수가 그 정보를 감추는 바람에 민수의 아이가 모두 딸인지 아니면 하나만 딸인지를 알지 못하는 맥락에 있습니다. “둘 중 적어도 한 명은 딸이다.”는 진술을 민수가 사용하는 맥락과 우리가 사용하는 맥락은 이처럼 다릅니다.

‘적어도’란 표현이 사용되는 두 가지 유형의 맥락이 구별되었다면, 다른 사람의 관점을 취하는 것이 허용되는 상황과 그렇지 못하는 상황을 구별해 봅시다. 민수가 두 아이 중 한 명이 ‘지나’란 이름을 갖고 있다는 정보를 제시하는 상황에서 우리는 그의 관점을 취하는 것이 허용된다고 나는 이미 말한 바 있습니다. 민수가 두 아이 중 한 명이 ‘지나’란 이름을 갖고 있다는 것을 밝혔다는 사실을 가지고 우리는 무엇을 할 수 있을까요? 우선, 민수가 두 아이를 ‘구별할 능력’이 있을 뿐 아니라 실제로 두 아이를 구별할 수 있다는 것을 알 수 있겠지요. 그리고 우리 자신도 나중에 필요하다면 두 아이를 구별하는 데 민수가 알려준 정보를 이용할 수 있을 겁니다. 이는 너무나 당연한 사실이라서 사소해 보이지만, 중요한 사실입니다.

사실 두 아이나 두 동전의 사례에서는 다른 사람의 관점을 취하는 것이 허용된다는 것이 무엇인지 잘 드러나지 않습니다. 간단히 말하자면, 두 사람이 관련된 사항에 관해서 동일한 인식적 상태에 있다면 두 사람은 서로의 관점을 취하는 것이 서로 허용

되겠지요. 하지만 ‘관련된 사항’이 무엇이며 ‘인식적 상태의 동일성’을 규정하는 것은 쉬운 일이 아닐 겁니다. 여기서는 좀 더 직관적인 차원에서 이해를 해 보도록 하지요.

만약 그대를 누군가가 강제로 납치해서 혼절을 하게 한 후 어떤 방에 가둬 두었는데 한참 후 그대가 정신을 차렸다고 합시다. 그런데 당신을 납치한 자가 문을 열고 이런 질문을 던집니다.

[납치] 이 건물에는 똑같이 생긴 두 방이 있는데, 적어도 한 방에는 사람이 있습니다. 이 두 방 모두에 사람이 있을 확률은 얼마일까요? 단, 각 방에 사람이 있을 확률은 1/2입니다.

이 질문에 대해서 그대가 내릴 답은 ‘1/2’이어야 합니다. 왜냐하면 결국 그 답은 당신이 있지 않는 다른 방에 사람이 있을 확률과 같고, 그 값은 1/2이기 때문이지요. 그렇지 않나요? 왜 그런지를 좀 더 상세하게 설명해볼까요? 당신은 어느 방에 지금 있는지 모릅니다. 편의상 두 방을 방1, 방2라고 부릅시다. 그대는 있을 수 있는 상황으로 다음과 같은 경우를 떠올려야 합니다. (방1: 나, 방2: 사람 없음), (방1: 사람 없음, 방2: 나), (방1: 나, 방2: 다른 사람), (방1: 다른 사람, 방2: 나). 이렇게 네 가지 경우 중에서 두 방에 모두 사람이 있는 경우는 두 가지이기 때문에, [납치]에 대해서 그대가 내려야 하는 답은 1/2이 되겠지요.

하지만 똑같은 질문을 그대가 아니라 건물 밖을 지나가고 있는 행인에게 물어본다면, 그는 어떻게 대답해야 할까요? 그 답은 [질문1]에서처럼 ‘1/3’이어야 합니다. 왜 그런 차이가 생겨날까요? 당신도 건물 밖의 행인도 어떤 의미에서는 두 방을 구별할 수 없습니다. 당신이 납치에서 풀려나서 나중에 그 건물을 찾더라도 어느 방에 자신이 있었는지 기억할 수 없을 정도로 두 방이 똑같은 모양을 하고 있다면 말이지요. 하지만 또 다른 의미에서 당신은 행인과는 달리 두 방을 구별할 수 있습니다. 왜냐하면 한 방에는 지금 바로 당신이 있고 다른 방에서는 그렇지 않기 때문이지요. 그것을 당신은 너무나 잘 알고 있습니다. 그런 점에서 당신은 행인보다 납치범의 인식적 상태에 더 가깝다고 할 수 있지요. 바로 이 점이 당신과 행인의 관점 사이에 존재하는 차이점이라고 할 수 있습니다.

내 설명이 너무 길어졌습니다. 요령 없는 설명일수록 길어지는 법이지요. 이제 당신이 끌어들었던 동전의 사례들로 돌아가 봅시다. 동전의 사례들 중에서 당신과 생각을 같이 하는 것도 있고 그렇지 않은 것도 있습니다. 하지만 그 점을 여기서 거론할 필요는 없을 것 같습니다. 왜냐하면 나는 [동전2]와 [질문2]가 동일한 구조를 갖고 있지 않다고 생각하기 때문입니다. 또한 [동전3]과 [질문3]도 동일한 구조를 갖고 있지 않습니다.

[동전2]에서 두 동전 모두 앞면이 나온 경우 우리는 어느 쪽을 가릴 ‘자유’가 있습니다. 반면 [질문2]에서 민수의 경우는 다릅니다. 민수의 두 아이가 모두 딸인 경우 민수는 한 딸을 가리키며 ‘저 아이가 내 딸’이라고 말하고 있습니다. 여기서 두 가지 점에 주목할 필요가 있습니다. 하나는, 민수의 경우 마침 자신의 곁을 지나가는 자신의 딸을 지칭하고 있다는 점입니다. 다시 말해서 그는 다른 아이를 지칭할 자유가 없었다는 점입니다. 다른 하나는, 우리는 민수가 지칭하는 한 아이만을 볼 뿐 다른

한 아이를 보고 있지 않다는 겁니다. 이런 이유에서 나는 [동전2]와 [질문2]가 동일한 구조를 갖고 있지 않다고 생각합니다.

[동전3]와 [질문3]은 어떨까요? 이 둘도 동일한 구조를 갖고 있다고 볼 수 없습니다. [동전3]에서 우리는 10원짜리 동전이든 100원짜리 동전이든 앞면이 나오는 것을 가리게 됩니다. 여기서 10원이나 100원이나는 아이의 이름에 비유되고 앞면이나 뒷면이나는 아이의 성별에 비유될 수 있겠지요? 하지만 [질문3]에서 민수가 자신의 아이 중 ‘지나’라는 이름의 딸이 있다고 말하는 것은 ‘10원짜리가 앞면이다’ 또는 ‘100원짜리가 앞면이다’는 것을 확정적으로 말하는 것에 해당합니다. 다시 말해서 민수는 10원짜리이든 100원짜리이든 앞면이 나오는 것을 가릴 수 있는 ‘자유’가 없습니다.

명: 우리의 긴 대화가 결국은 제 자리로 돌아온 느낌이군요. 그대는 계속해서 [질문1]에는 $\frac{1}{3}$ 을, [질문2]와 [질문3]에는 $\frac{1}{2}$ 이라고 답하고, 저는 모두 $\frac{1}{3}$ 이라는 애초의 주장으로 돌아왔습니다. 하지만 대답의 변화는 없지만 그 근거를 찾는 과정에서 우리 모두 주목하는 고찰을 찾아볼 수 있었습니다. 저는 민수가 갖고 있는 ‘자유’에 대해서 생각해 보게 되었고, 그대 역시 그 점에 주목하고 있습니다. 이 점을 저는 보다 더 생각해 볼 필요가 있다고 생각합니다. 또한 저는 민수가 감추는 정보에 주목하고 있다면 그대는 민수가 우리에게 드러내는 정보에 주목하려는 점도 더 흥미할 대목이라는 생각이 드는군요.

한: 맞습니다. 하지만 우리의 공통점을 찾아내는 것은 또 다른 긴 대화를 필요로 할 것 같네요. 두 딸의 문제는 그 후에 다시 꺼내보도록 하지요.

참고 문헌

Blais, Brian (2010), There Once Was a Girl Named Florida.

<http://bblais.blogspot.kr/2010/01/there-once-was-girl-named-florida-aka.html>.

Milodinow, Leonard (2008), *The Drunkard's Walk* (New York: Vintage Books).

총 회:

2011-2013년 한국논리학회 결산

사 회: 박병철 선생님(부산외대)

Ⅲ. 2011년 9월 ~ 2013년 7월 논리연구 출판 및 발송 비용

날짜	논리연구 출판비	논리연구 발송비	발송준비 및 문구비
20111111	₩1,178,320	₩85,780	₩55,000
20120309	₩1,246,080	₩92,410	₩21,140
20120706	₩733,400	₩58,800	₩27,250
20121111	₩752,400	₩58,680	₩5,500
20130220	₩878,240	₩81,750	₩2,650
20130704	₩1,110,560	₩91,070	₩8,000
합계	₩5,899,000	₩468,490	₩119,540
평균	₩983,167	₩78,082	₩19,923
09-11지출합계	₩6,487,030		

Ⅳ. 지출 대비 수익 결산

	① 09-11년	② 11-13년	① 대비 ②	
논리연구 지출	₩5,842,716	₩6,487,030	₩644,314	지출증가
학회 지출	₩4,364,870	₩4,011,740	₩353,130	지출감소
학회 수익	₩12,086,148	₩10,126,698	₩1,959,450	수익감소
수익-지출	₩1,878,562	- ₩372,072	.	.