Academic Issue

글 | 양준모 (한국선물협회 연구원)

이자율 기간구조 모형
(Term Structure of Interest Rate)

이자율 파생상품의 가치평가는 단기 이자율의 확률과정에 대한 고려와 이에 대한 정확한 정의에 따라 그 가격구조의 특성이 결정되기 때문에 단기 이자율 확률과정의 정확한 기간구조에 대한 고려가 없을 경우 이자율 파생상품의 이론가격에 심각한 왜곡을 가져올 수 있다. 따라서 다양한 이자율 파생상품의 특성과 합리적인 이자율 모형에 근거한 파생상품 가격 연구의 필요성이 점차 커지고 있다.

Ⅰ. 연구목적

최근 발표된 국제결제은행(BIS)의 자료에 따르면 전 세계적으로 최근 3년간 이자율 파생상품 시장의 규모는 이전 3년에 비해 85%나 증가했고, 이런 속도라면 조만간 이자율 파생상품 시장의 규모가 외환연계 상품 시장의 규모를 추월할 것으로 전망하고 있다. 이러한 시장규모의 증가는 전 세계적으로 급변하는 금융환경으로 인해 점차 확대되어 가는 이자율 변동의 위험 관리에 이자율 파생상품이 유용한 수단을 제공하기 때문이라고 할 수 있다.

국내 금융시장의 경우도 이러한 이유로 인해 이자율 파생상품에 대한 수요가 점차 증가하고 있으며 현재 한국선물거래소(KOFEX : Korea Futures Exchange)에는 3년 국채선물, 3년 국채선물옵션, 5년 국채선물, CD금리선물, 통안 증권 금리선물 등 다섯가지의 이자율 파생상품이 거래되고 있다. 하지만 합리적인 가격결정 모델이 없어, 거래되고 있는 상품가격의 타당성 여부에 대한 판단이 어렵다는 현실에 직면하고 있다. 특히 이자율 파생상품의 가치평가는 단기 이자율의 확률과정에 대한 고려와 이에 대한 정확한 정의에 따라 그 가격구조의 특성이 결정되기 때문에 단기 이자율 확률과정의 정확한 기간구조에 대한 고려가 없을 경우 이자율 파생상품의 이론가격에 심각한 왜곡을 가져올 수 있다. 따라서 다양한 이자율 파생상품의 특성과 합리적인 이자율 모형에 근거한 파생상품 가격 연구의 필요성이 점차 커지고 있다.

또한 우리나라 국채선물의 경우 국채시장의 유동성 부족과 이로 인한 결제 불이행 위험 등을 고려하여 실물인수도 대신 현금결제방식을 채택하고 있는데, 이러한 우리나라 국채선물의 특성은 정확한 국채선물의 이론가를 계산하는 데 있어 문제점을 발생시키고 있다. 예를 들어 3년 국채선물의 기초 자산이 국채현물이 아닌 6개월마다 이표를 지급하는 만기 3년, 표면금리 연 8%인 가상 국고채권이기 때문에 현 · 선물을 이용해 차익거래에 기반을 둔 보유비용모형(Cost of Carry Model)에 의한 이론가격은 오차가 내재된 근사값이 되며, 이러한 이유로 인해 이를 이용한 헤지 전략은 엄밀한 의미의 무위험 차익거래가 아닌 다소 위험이 내포된 차익거래가 되므로 듀레이션을 이용한 채권의 헤징 전략에 있어서 정확한 헤지 비율 산출에 어려움이 따른다.

따라서 이러한 보유비용모형에 기초한 이론가격 산정방식의 한계점을 극복하기 위해 다양한 모형들이 시도되고 있는데, 그 대안으로 제시된 방법이 이자율 기간구조를 이용한 국채선물 이론가격 산정모형이다. 따라서 이러한 가격결정 과정을 보다 심도 있게 이해하기 위해 이자율 기간구조의 기본 개념과 이자율 기간구조 모형의 종류에 대해 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이자율 기간구조란?

이자율 기간구조 또는 수익률 곡선은 신용도가 동일한 주체가 발행한 채권의 만기대비 수익률을 만기의 순서에 따라 연결해 나타낸 곡선을 말한다. 따라서 국채와 같은 무위험 자산에 대한 수익률 곡선을 무위험 금리 기간구조라고 하며, 회사채와 같이 신용 위험이 내재되어 있는 위험 자산의 수익률 곡선을 신용 스프레드의 기간구조라고 부른다.

시장에서 거래되는 채권들은 다양한 형태로 발행될 뿐만 아니라 같은 종류의 채권이라도 잔존만기와 표면금리가 다를 경우, 각각 다른 종류의 채권으로 취급되기 때문에 특정 채권의 표면금리에 따라 만기수익률(YTM : Yield to Maturity)이 달라져 채권간의 비교가 어렵게 되는 문제가 있다.

Term
Structure
of
Interest
Rate

이러한 문제로 인해 수익률 곡선에서 만기별 이자율은 정기적으로 이자가 지급되는 이표채(Coupon Bond)의 만기수익률이 아니라 할인채(Discount Bond)의 만기수익률(YTM)을 의미한다. 수익률 곡선이 할인채의 만기수익률이라는 점에서 이를 현물이자율 곡선(Spot Yield Curve)으로 부르기도 한다.

이러한 수익률 곡선은 채권과 같은 고정소득증권(Fixed Income Security)의 가치평가, 미래의 금리예측, 자산부채관리(Asset Liability Management), 금리관련 파생상품의 가격산정 등 금리 위험의 측정과 조절에 있어서 필수 불가결한 정보를 제공한다. 특히 미국, 영국 등 선진국에서는 통화 당국이 금리 기간구조를 통화정책의 결정에 이용한다. 그러나 우리나라의 경우에는 발행시기 및 물량이 일정하지 않고, 특히 유통시장의 경우 거래의 대부분이 장외에서 이루어져 신뢰할 만한 수익률 곡선을 도출하기에는 어려움이 많다.

이러한 이자율 기간구조는 다음의 세 가지 방식을 통해 표현할 수 있다.

⊙ 순수할인채권(Pure Discount Bond)의 가격을 이용하여 표현

– 순수할인채권은 만기 전에는 현금 흐름이 없으며, 오직 만기에만 유일한 1 단위(예: 1원)의 현금 흐름이 발생하는 채권이다. 이러한 순수할인채권의 가격함수를 P(t,T)로 정의하면 이는 만기가 T 시점인 순수할인채권의 현재 t 시점에서의 가격을 나타내는 것이며, 이를 이용하여 이자율 기간구조를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \text{ 단, } t \leq T,\ P(T,T) = 1 \qquad (1)$$

⊙ 연속복리수익률(Continuously Compounded Interest)로 표현

– 이는 (1)식을 연속복리수익률로 다시 표현한 것으로 다음과 같다.

$$R(t,T) = -\left[\frac{1}{T-t}\right]\ln P(t,T) \qquad (2)$$

단, $R(t,T)$는 만기가 T인 현물이자율(spot rate)

⊙ 선도이자율(Forward Rate)을 이용하여 표현

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial s}\ln P(t,T) \qquad (3)$$

– 위의 선도이자율 $f(t,T)$는 순간선도이자율(Instantaneous Forward Rate)을 의미하며, 이는 t 시점에서 결정된 시점 T와 시점 $T+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)사이의 아주 짧은 기간의 이자율을 의미한다(이 때 ε는 ε > 0인 임의의 수를 의

미). 이와 유사한 개념으로 단기이자율(Short Rate)이 있는데, 이는 (2)식의 연속복리수익률의 극한 개념으로 만기까지의 기간이 아주 짧은 이자율이다.

$$r(t) = \lim_{t \to T} R(t,T) = - \frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} \qquad (4)$$

위의 식에서와 같이 만약 순간선도이자율의 만기시점이 T가 아니라 t가 되면 순간선도이자율과 단기이자율은 같다. 즉 $f(t,T) = r(t)$이다.

Ⅲ. 이자율 기간구조 모형

1. 개 요

1973년 발표된 Black-Scholes 옵션가격결정이론은 합리적 시장에서는 차익거래 기회가 있을 수 없다는 시장 균형의 조건(No-Arbitrage Condition)을 기초로 도출된 주식옵션 프리미엄에 대한 가격공식으로서 투자가들에게 실질적으로 투자위험 관리를 할 수 있는 도구를 제공했다. 개별주식을 기초자산으로 하는 Black-Scholes 옵션가격결정이론은 외환, 채권, 주가지수 등을 기초자산으로 삼는 옵션가격과 증권시장에서 거래되는 전환사채, 신주인수권부사채 등의 가격 결정에도 이용되었을 뿐만 아니라 기업 재무의사 결정에 이르기까지 다방면으로 활용되고 있다.

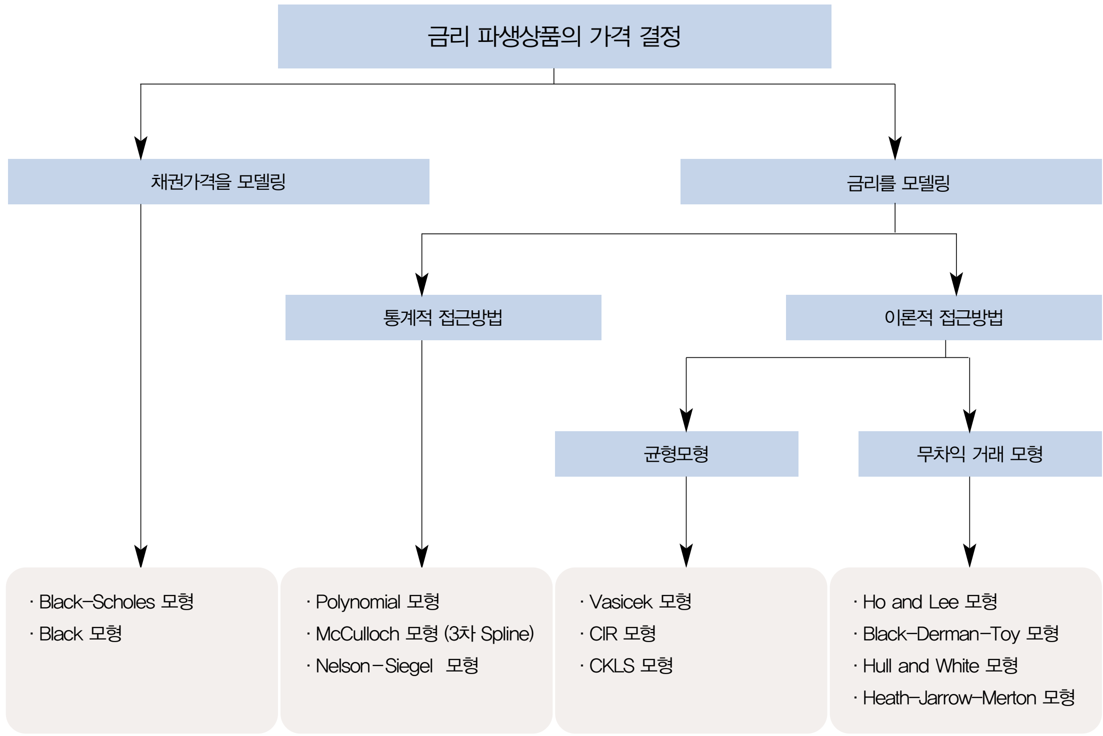
그러나 Black-Scholes 이론을 금리변동과 직접적인 관계를 갖는 금융증권의 가격결정에 적용하려 할 때에는 많은 문제에 봉착하게 된다. 특히 Black-Scholes 모형에서 설정한 이자율이 항상 일정하여 변동이 없다는 가정(Flat Term Structure)은 금리 변동과 직접적인 연관을 갖는 조건부 청구권(Contingent Claims), 특히 채권, 금리선물, 금리옵션, 금리선물옵션 등의 금리증권의 가격결정에 적합하지 않다. 금리증권 가격의 가장 근본적인 위험의 원천은 금리 변동에 있기 때문이다.

이러한 이유로 미래 금리가 불확실한 상황에서 금리증권에 대한 가격결정에 관하여 많은 연구가 이루어져 왔다. 연속적 시간에서 금리가 확률과정(Stochastic Process)을 따른다는 가정 하에 차익거래 기회가 없는 시장에서 금융증권의 가격 결정식은 편미분방정식(PDE ; Partial Differential Equation)으로 표현되며 경계조건(Boundary Condition)은 각 금리증권의 상황에 따른 현금흐름에 따라 결정된다.

2. 모형의 종류

이자율 기간구조에 관한 연구는 그 접근방법에 따라 크게 통계적 접근방법과 이론적 접근방법 두 가지로 나누어 볼 수 있다.

〈금리 파생상품 평가모형의 대분류〉



(1) 통계적 접근방법

통계적 접근방법은 채권시장의 자료를 이용하여 이자율 기간구조를 가장 잘 나타내는 함수형태를 찾는 방법이다. 수익률 곡선이나 선도금리 곡선은 직접 관찰되지 않으므로 수익률 자료가 없는 만기에 대해서는 내삽(Interpolation)하거나 잡음(Noise)의 영향을 제거하는 평활화(Smoothing)가 필요하다. 따라서 이 접근방법은 평활화에 사용하는 함수의 모양에 따라 다항식(Polynomial), 스플라인(Spline), Nelson-Siegel 방식 등 여러 형태로 나누어진다.

통계적 접근방법은 이론적인 제약 없이 일반적인 함수 중 주어진 이자율 기간구조를 가장 잘 설명하는 함수를 찾아내는 방법이기 때문에 실제 가격의 변화를 대부분 설명할 수 있다는 장점을 가지고 있으나, 이론적인 틀이 없어 이자율 기간구조의 동태적 변화를 일관성 있게 설명할 수 없다는 단점도 지닌다. McCulloch(1975)는 3차 스플라인(Cubic Spline)을 사용해 할인함수를 추정하는 방식을 처음으로 제안했으며, Vasicek-Fong(1982)은 지수 스플라인(Exponential Spline)을, Nelson-Siegel(1987)은 모수 절약적인 2차 편미분 방정식 형태의 추정모형을 제기했다.

일반적으로 특정 함수(예: 수익률 곡선)를 이론의 뒷받침 없이 통계적으로 추정하는 경우, 오차의 최소화와 평활화라는 두 가지 상충되는 목표를 연구목적에 따라 적절하게 조절해야 한다. 일반적인 함수형태를 갖는 다항식

(Polynomial)이나 스플라인 방법(Spline Method)을 적용하는 경우, 오차를 최소화시킬 수 있다는 장점은 있으나 함수의 평활화 정도는 떨어지는 단점이 있다. 특히 굴곡이 너무 심한 수익률 곡선은 실제 관찰되는 수익률을 과소평가하거나 과대평가하여 실제 수익률 곡선을 적절하게 근사화하지 못하는 과대추정(Overfitting)의 문제를 발생시키며, 음(-)의 선도금리를 갖는 경우가 많다.

이자율 기간구조에 대한 통계적 추정방법들은 채권거래가 빈번하고 가격자료의 잡음(Noise)이 적은 시장에 적합하므로 국채의 가치평가에는 유리하지만, 잡음이 많이 포함되어 있는 회사채에는 이용되기 어렵다는 문제점이 있다.

채권의 특성, 평가목적 등에 따라 통계적 접근방법과 이론적 접근방법의 유용성이 달라지므로 이 두 접근법은 상호 보완적이라고 할 수 있다. 즉 통계적 접근방법을 이용하여 매일의 수익률 곡선을 구한 후, 이를 바탕으로 이론적 접근방법에 대한 타당성을 연구하는 것이 일반적인 절차로 받아들여진다.

(2) 이론적 접근방법

이 방법은 단기 이자율(r)의 움직임을 설명하는 확률모형을 설정한 후 그에 따라 금리 기간구조를 추정하는 방법이다. Vasicek(1977), Cox, Ingersoll and Ross(1985) 등은 투자자들의 위험 선호를 고려하여 연속시간에서 단기금리의 전개 과정을 모형화했고, Ho and Lee(1986), Hull and White(1990)는 관찰된 초기 금리 기간구조에 적합하도록 모수가 조정된 금리모형을 제기하였다.

일반적으로 무위험 단기금리는 다음과 같은 이토과정(Ito Process)을 따른다고 가정한다.

$$dr = \mu(r)\,dt + \sigma(r)\,dz \qquad (5)$$

여기서 $\mu(r)$: 추세함수 (Drift Term)
$\sigma(r)$: 확산함수 (Diffusion Term)
dz : Brownian Motion (Wiener 확률과정을 따름)

이러한 확률과정은 현실의 금리특성을 반영하여 추세함수와 확산함수를 구체화하게 된다. 하지만 앞서 언급한 바와 같이, 단기금리에 대한 이러한 확률과정은 브라운과정에 기초하고 있으므로 이에 대해 의문이 제기될 수 있다. 실제로 무위험 단기금리로 간주되는 정책금리인 미국의 연방기금금리나 우리나라의 콜금리는 브라운과정과 같이 연속성(Continuity)을 가진다고 보기 어렵다. 이러한 문제의식 하에서 Das(2000)는 금리변동에 있어 포아송과정(Poisson Process)과 같은 점프를 고려하는 점프확산모형(Jump Diffusion Model)을 제기했다.

이론적 접근방법은 채권가격의 동태적 움직임을 결정하는 상태변수(State Variable)가 몇 개인가에 따라 단일요인모형(Single-Factor Model)과 복수요인모형(Multi-Factor Model)으로 구분할 수 있다. 이자율 기간구조모형에서 사용되는 상태변수로는 순간현물이자율(Instantaneous Spot Rate)이 가장 많이 사용되며, 그 외 이자율의 변동성, 장 · 단기 금리차(Term Spread), 예상 인플레이션 등이 상태변수로 사용되기도 한다.

일반적으로 이자율 기간구조에 대한 이론적 접근방법은 크게 균형모형(Equilibrium Model)과 무차익거래

모형 (No-Arbitrage Model)으로 나눌 수 있는데, 두 모형 모두 단기이자율(Short Rate)의 행태방정식을 통해 모든 이자율의 움직임을 확률적으로 표시한다. 다만 전자의 경우는 모형을 통해 초기 이자율 기간구조(Initial Term Structure)를 도출하여 사용하고, 후자의 경우는 현실에서 주어진 초기이자율 기간구조를 바탕으로 각종 분석을 한다.

균형 모형에서의 모수는 시간과 무관한 상수이며 이자율 기간구조가 결과물인 반면, 무차익거래 모형에서의 모수는 시간에 대한 함수이며 특정 시점의 금리 기간구조가 초기 입력치라는 점이 두 모형 간의 기본적인 차이이다.

대표적인 균형 모형으로는 Vasicek(1977), Cox,Ingersoll and Ross(1985), Longstaff and Schwartz(1992), Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders(1992) 모형 등이 있으며, 무차익거래 모형으로는 Ho and Lee(1986), Black-Derman-Toy(1990), Hull and White(1990), Black and Karasinski(1991), Heath-Jarrow-Morton(1992) 모형 등이 있다.

1) 균형모형

균형모형은 주어진 경제 여건 하에서 개별 경제주체의 효용함수를 극대화하면서 모든 시장이 균형을 이루는 가격조건을 통해 이자율이 결정되는 모형이다. 즉 개별 경제주체의 분권화된 행위가 시장 전체적으로 균형을 이루어야 한다는 논리 하에 단기금리의 확률과정(Stochastic Process)을 도출하고, 그 과정이 채권가격에 어떻게 작용하는지를 분석하는 모형이다. 단기금리와 같은 상태변수들이 경제 전체의 균형가격을 결정하게 되며 동태적 움직임은 이러한 상태변수들의 확률과정에 의해 변화한다. 따라서 균형모형은 금리 기간구조의 동태적 변화에 대해 일관성 있는 정보를 제공할 수 있는 장점이 있으며, 어느 변수를 상태변수로 가정하느냐에 따라 상이한 모형으로 구분된다.

균형모형은 위험의 시장가격(Market Price of Risk)과 같은 실제 관찰이 불가능한 모수들이 모형 내에 포함되어 있다는 점과 모형에서 추정한 금리 기간구조가 실제 기간구조와 일치하지 않는다는 단점이 있다.

균형모형에는 One-Factor Model인 Vasicek 모형(1977)과 Cox, Ingersoll and Ross 모형(1985), Two Factor Model인 Brennan-Schwartz 모형(1992)이 있다. 이 중 가장 널리 이용되고 있는 Vasicek 모형과 Cox, Ingersoll and Ross 모형의 기본적인 접근방법을 간략히 살펴보자.

Vasicek 모형과 CIR 모형은 금리의 평균회귀성향을 반영하여 추세함수(Drift Term)를 $\mu(r) = a(b-r)$로 모형화 했다. 특히 CIR는 금리수준에 의존하는 변동성의 이분산성(Heteroskedasticity)을 고려하기 위해 확산함수(Diffusion Term)를 $\sigma(r) = \sigma\sqrt{r}$ 로 모형화 하였다.

①기본가정

이들 모형들의 기본적인 가정은 다음과 같다.

- 채권시장은 세금, 거래비용, 공매도(Short-Sale)에 대한 제한이 없고 채권은 무한히 분할 가능한 완전시장(Perfect Market)이다.
- 모든 투자자의 선호함수는 단조증가함수이며, 따라서 다다익선을 추구한다.
- 모든 채권가격은 하나의 상태변수(State Variable)에 의해 결정되며 이들 상태변수는 단기이자율 (r)이다.
- 단기이자율 r는 다음과 같은 행태방정식으로 정의된다.

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dz$$

②Vasicek 모형

이 모형은 외생적으로 결정되는 모수인 위험의 시장가격을 이용하여 금리 기간구조에 대한 이론모형을 도출하였으며, 금리변화에 대한 확률과정을 다음과 같이 제시했다.

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz \qquad (6)$$

b는 이자율에 있어서 장기 평균수준(Long-Run Average)을 의미하고, a는 단기 이자율의 평균회귀성향(Mean-Reverting Property), 즉 현재의 단기 이자율(r)이 장기평균수준으로 얼마나 빨리 돌아가는지를 나타내는 조정속도(Speed of Adjustment)이다. 이러한 단기 이자율 행태방정식을 Ornstein-Uhlenbeck 과정이라고 한다.

그러나 이 모형은 다음과 같은 단점을 가지고 있다. 만약 이 모형에서 $\frac{\sigma}{b}$가 상당히 크면, 단기 이자율 r가 음(-)의 값을 가질 가능성이 존재한다는 문제가 있다. 구체적으로, 시장에 부정적인 충격(Negative Shock)이 가해질 경우, 즉 dz〈 0 인 경우에 변동성의 크기를 나타내는 σ가 금리의 장기평균수준에 비해 큰 값을 가지는 경우에 금리가 음(-)의 값이 될 가능성이 존재한다. 또한 확산함수가 σdz로 설정되어 σ가 상수이므로 단기금리의 이분산성(Heteroskedasticity)을 표현하지 못한다는 한계를 가지고 있다.

③CIR 모형

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \qquad (7)$$

CIR 모형의 경우에는 dz 항이 $\sigma\sqrt{r}$로 정의되는 차이가 있다. 이 모형은 경제학에서 흔히 이용되는 일반균형 모형의 기본적인 특성을 가진다. 이러한 제곱근 과정에서는 단기 이자율의 수준이 낮을수록 변동성도 감소하게 되므로 앞서 Vasicek 모형의 단점으로 지적된 것처럼 이자율이 음(-)이 될 수 있는 문제를 피할 수 있다. 게다가 높은 이자율 수준에서 이자율 과정은 변동성이 증가하는 특성을 가지는데, 이는 실증적인 연구에서 도출된 정형화된 사실과 일치한다. 따라서 CIR 모형은 Vasicek 모형에 비해 개선된 모형으로 간주된다.

이자율 기간구조가 순간 현물금리에 의해서만 결정된다고 보는 Vasicek이나 CIR 모형은 비교적 간단한 형태의 해를 도출할 수 있지만, 만기가 다른 이자율들이 모두 동일한 방향으로 움직여야 한다는 다소 비현실적인 가정을 가진다. 또한 이자율 기간구조가 단 하나의 요인, 즉 단기이자율에 의해서만 결정된다는 주장도 제약적인 것으로 판단된다.

④Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders 모형

CKLS(1992)는 단일요인 모형에 대해 보다 일반적인 다음과 같은 연속시간모형을 제시했다.

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^{\gamma} dz \qquad (8)$$

여기서, β는 평균회귀 모수이며, γ는 이자율 수준에 대한 변동성의 탄력성 크기를 나타낸다. 따라서 다양한 형태의 모수 제약을 통해 기존에 제기된 여러 모형을 포괄할 수 있게 된다. 즉 모수 $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$ 값에 따라 각각의 모형으로 분류될 수 있다. 이 때 dz는 Wiener 확률과정을 따르고 단기 이자율의 초기값인 r_0는 양의 상수로 가정한다. 예를 들어, γ=0이라는 모수 제약을 가하면 위의 식은 Vasicek 모형이 되고, γ=0.5라는 모수 제약을 가하면 CIR 모형이 된다.

이론적으로 단기 이자율이 장기평균으로 수렴하려는 성질을 가질 경우 α, σ, γ는 양의 값을 갖고 β는 음의 값을 갖는다. 이때 $-\beta(\beta〈0)$는 장기 평균으로 수렴하는 속도를 의미하고, $-\alpha / \beta$는 장기평균을 의미한다. β가 음의 값을 갖는 경우 단기 이자율이 장기 평균보다 크면 추세함수(Drift Term)가 음이 되고 반대로 단기 이자율이 장기 평균보다 작은 경우 추세함수(Drift Term)는 양이 되어 단기 이자율이 장기 평균에서 크게 벗어나지 않고 수렴하는 성질(Mean-Reverting Property)을 반영한다.

월별 T-bill 자료를 이용하여 추정한 결과, CKLS(1992)는 변동성이 이자율 수준 r에 크게 의존한다는 사실을 확인했다. 그리고 변동성의 탄력성에 대해 γ>1인 모형이 γ<1인 모형에 비해 금리의 변동성 패턴을 더욱 적절하게 표현하는 것으로 나타났다. CKLS는 이러한 높은 변동성 탄력성이 단기 이자율 모형에서 가장 중요한 특징으로 간주했다.

이와 관련해, 박준용(2001) 등은 국내 이자율 자료에 대해 여러 단기 이자율 모형을 이용하여 실증 분석했다. 그 결과, 선형추세가 약한 평균회귀성향을 보이며, 변동성의 이자율 탄력성은 상대적으로 크고, 높은 이자율 수준에서 추세함수가 급격하게 감소하는 비선형성이 존재한다고 주장했다. 또한 한중호, 김인준(2000)은 CKLS 모형을 이용해 한국의 단기 이자율 모형에 대한 실증적 비교연구를 통해 단기 이자율의 적절한 대용 이자율(Proxy)을 제시하고자 하였다.

2) 무차익거래 모형

무차익거래 모형은 Black-Scholes 의 옵션가격 모형에서와 같이 만기가 서로 다른 채권들을 이용해 무위험 포트폴리오를 형성한 후, 차익거래의 기회가 존재하지 않기 위해서는 이 포트폴리오의 수익률은 무위험 이자율과 같아야 한다는 조건을 이용해 채권들의 가격간 관계식을 도출하는 모형이다. 뿐만 아니라 무차익거래 모형을 이용한 실증분석에 있어서는 현재 시장에서 관찰되는 이자율 기간구조를 정확히 복제할 수 있도록 모수를 결정하므로 균형모형에 비해 이자율 기간구조에 대한 추정이 정확하다. 그러나 무차익 모형은 한 시점에서 기간구조를 추정한 것이므로 동태적 변화나 예측에 대해서는 별다른 정보를 제공하지 못한다. 즉 시간에 따라 모수가 계속 변하므로 기간구조의 동태적 변화에 대해 일관성이 있는 설명을 제공할 수 없다.

또한 이 모형은 균형모형에서의 문제점인 현재의 이자율 기간구조와의 불일치를 해결하기 위해 시간에 따라 변하는 모수(Time-Varying Parameters)를 모형에 도입함으로써 모형을 통해 구한 이자율 기간구조와 현재의 이자율 기간구조가 정확히 일치하도록 만든다. 무차익거래 모형은 현재 이용 가능한 채권의 가격정보를 통해 순

수할인채권의 가격을 찾아내고 이를 이용하여 현재의 이자율 기간구조와 일치시키는 모수를 찾아내는 방법을 사용한다.

무차익거래 모형에는 Ho and Lee(1986), Hull and White(1990,1993), Black-Derman-Toy(1990), Heath-Jarrow-Morton(1992) 모형 등이 있으며, 무차익거래 조건을 이용하여 모형을 도출하는 데 사용되는 외생변수로는 Ho and Lee 모형은 채권가격을 이용하며, HJM 모형은 선도금리를 이용한다.

모형에서 구해진 이자율 기간구조가 현재 시장의 이자율 기간구조와 일치하지 않는다는 균형모형의 단점 때문에 무차익거래 모형이 채권 및 이자율 파생상품 트레이더에게 보다 널리 이용되고 있다.

①Ho and Lee 모형

무차익거래 모형 중 가장 처음 만들어진 모형이 Ho and Lee 모형이다. 이 모형은 원래 이산기간(Discrete-Time) 모형으로 만들어졌으며, 이항모형(Binomial Model)인 Cox-Ross-Rubinstein 모형의 연장으로 볼 수 있다. 이 모형의 구조는 평균회귀(Mean-Reversion) 속성을 가지지 않는 Vasicek 모형에 속하는 모형으로 볼 수 있으며, 시장에서 관찰되는 수익률 곡선에 적합하도록 추세함수(Drift Term)를 $\mu(r)=\theta(t)$로 모형화했다.

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \qquad (9)$$

단, $\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$로 현재의 순간선도이자율 곡선의 기울기와 단기 이자율의 변동성을 의미

그러나 Ho and Lee 모형은 Vasicek 모형과 마찬가지로 단기이자율이 음(-)의 값을 가질 수 있는 확률이 존재한다는 단점이 있다.

②Hull and White 모형

Hull and White, Black-Derman-Toy, Black-Karasinky 모형은 단기이자율의 행태방정식에 추세함수(Drift Term)에만, 혹은 추세함수와 확산함수(Diffusion Term) 모두에 시간가변 모수를 도입함으로써 모형의 채권가격을 현재의 이자율 기간구조(Interest Rate Term Structure)와 변동성의 기간구조(Volatility Term Structure or Term Structure of Volatility)에 일치시킨다.

한편, Hull and White는 평균회귀 성향을 나타내는 추세함수 $\theta(t) - ar$에서 장기평균을 의미하는 $\theta(t)$를 Ho and Lee 모형과 같이 실제 수익률 곡선에 적합하도록 설정하였다. Hull and White 모형에서의 단기이자율의 행태방정식은 다음과 같다.

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \qquad (10)$$

단, $\theta(t) = F_t(0,t) + aF_t(0,t) + \dfrac{\sigma^2}{2a} \; (1 - e^{-2at})$

③기타 모형

· Black-Derman-Toy 모형(1990)은 Ho-Lee 모형의 단점을 보완하기 위하여 이자율이 음(-)의 값을 갖지

않도록 단기이자율이 로그노말 분포(Log-Normal Distribution)를 따른다고 가정하고, 단기이자율의 변동성이 시간에 따라 변하고 추세함수(Drift Term)가 이자율 수준에 의존하는 것으로 가정하여 평균회귀현상을 반영했다.

$$d \ln r = \left[\theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r\right] dt + \sigma dz$$

단, $\dfrac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$: 단기이자율의 평균회귀속도 (Speed of Mean Reversion)
$\sigma(t)$: 단기이자율의 장기평균 (Long-Run Mean)

· Heath-Jarrow-Morton은 Ho and Lee 모형을 선도금리에 대한 복수요인모형으로 확장했다.

· Das(1994) 모형은 이자율 확률과정에서 비연속적인 점프를 고려한 모형으로, 연속시간 확산과정에서 포아송 과정을 결합하는 형태로 오차항의 비정규성(Non-Normality)을 표현할 수 있는 모형이다. 실제 금리자료는 높은 첨도(Kurtosis)와 두터운 꼬리(Fat Tails)를 가지는 Leptokurtic 분포로 알려져 있으므로 이러한 점프과정을 포함하는 확률모형은 단기 이자율의 움직임에 보다 적절한 근사값을 제공한다고 주장한다. 이러한 모형을 점프-확산과정(Jump-Diffusion Process)이라고 하며, 채권시장에 들어오는 새로운 정보에 의해 가격에서의 점프가 빈번하게 발생하는 채권가치 평가에 자주 이용되고 있다.

이상에서 설명한 이자율 기간구조 모형을 특징별로 정리하면 다음과 같다.

〈 이자율 기간구조 모델 〉

구분	모형	단기 이자율의 행태방정식	특징
균형모델	Vasicek	$dr = \alpha(b-r)dt + \sigma dz$	· 단기 이자율(r)의 평균회귀성향 반영, · r 이 음(-)의 값을 가질 확률 존재
	CIR	$dr = \alpha(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$	· r 이 음(-)의 값을 갖는 문제점 해결 · 이자율 수준에 따른 변동성의 변화 고려
	CKLS	$dr = (\alpha+\beta r)dt + \sigma r^{\gamma}dz$	· 단일요인모형을 보다 일반화 즉 다양한 형태의 모수 제약을 통해 기존의 여러 모형을 포괄
무차익 거래 모형	Ho-Lee	$dr = \theta(t)dt + \sigma dz$	· 평균회귀 미반영 · 추세함수를 $\theta(t)$로 모형화 →$\theta(t)$를 실제 수익률 곡선에 적합화 · r 이 음(-)의 값을 가질 확률 존재
	Hull-White	$dr = (\theta(t) - \alpha r)dt + \sigma dz$	· 평균회귀 반영 · 추세함수에 장기평균을 의미하는 $\theta(t)$를 실제수익률 곡선에 적합하도록 설정
	BDT	$d\ln r = [\theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln r]dt + \sigma dz$	· r 이 로그노말 분포를 따른다고 가정 · 평균회귀 성향 반영 · $\theta(t)$를 실제 수익률 곡선에 적합화