수능 박중희 샘이 정리해주는.....

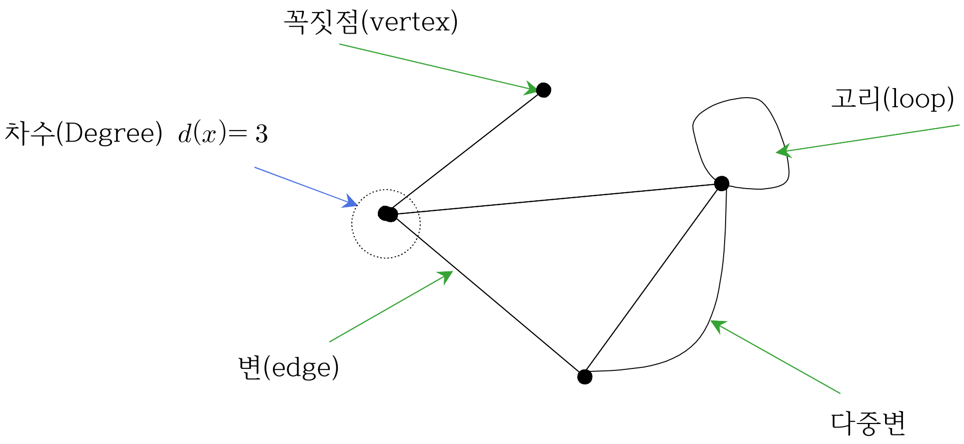
고등학생을 위한 수학1

그래프 이론 (기초)

개념잡기 그래프의 정의

그래프는 아래와 같은 방법으로 설명이 시작됩니다.

$G=(V,E)$



$$\begin{cases} \text{변의 집합} & V=\{A,B,C,D\} \\ \text{꼭짓점의 집합} & E=\{AB,AC,AD,\cdots\} \end{cases}$$

참고사항

1.

위수 (Order): 한 그래프 내에서 꼭짓점의 개수

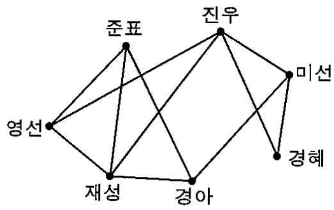
차수: 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수

2. 고등학교 과정은 단순그래프만을 다룬다.

단순그래프란 고리와 다중변이 없고, 차수가 0~$n-1$사이의 그래프로, 인접행렬에서는 1,0 만으로 구성된 행렬을 말한다.

그래프의 활용

1. 교우관계 그래프



⇒ 연기자들의 모임에서 같은 작품에 출연한 사람끼리 변으로 연결할 수 있다.
또 같이 출연한 작품 수만큼 변을 그어 나타내면 누가 누구와 같은 작품에 자주 출연하는지를 알 수 있다.

2. 방향성 그래프 (유향그래프)

다섯 개의 야구팀이 서로 리그 경기를 하면 각 팀을 점으로 나타낸 후에 직선으로 연결하면 그림i와 같이 나타낼 수 있다.

그림 i

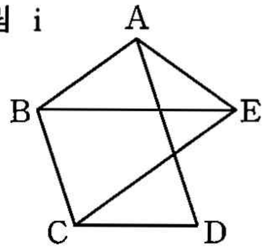
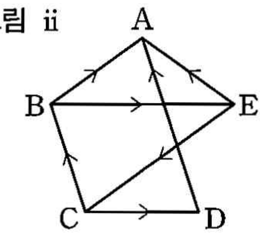


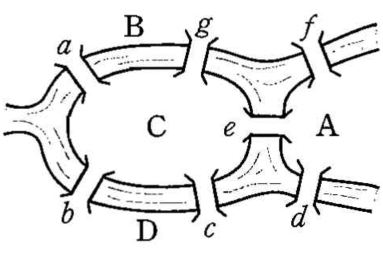
그림 ii

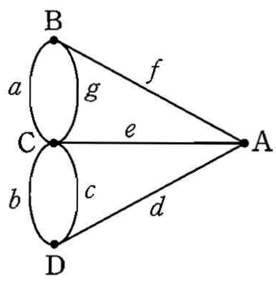


만약 A팀이 B팀을 이기면 B에서 A로 가는 화살표를 더하면 그림ii와 같이 경기결과를 알 수 있는 그래프가 된다. 이와 같은 그래프를 방향성 그래프라고 부른다.

3. 한붓그리기의 문제

쾨니히스베르크의 다리문제 : 18세기 동프로이센(현 러시아의 칼리니그라드)의 수도였던 쾨니히스베르크의 다리에서 같은 다리를 두 번 건너지 않고 모든 다리를 건널 수 있는가의 문제





4. 채색(색칠하기)문제

지도 색칠하기

by 수학의 정석

개념잡기 차수(Degree)

1. 차수에 대해 알아두어야 할 것을 정리 했습니다.

① 모든 차수의 합은 짝수이다.

(증명) 꼭짓점에 물려있는 변의 가장자리 ———● 을 성냥개비라 하고 그래프에 있는 성냥개비의 개수m을 구해보자

각 변마다 2개의 성냥개비가 있으므로 $m=2e$

꼭짓점 x에 $d(x)$개의 성냥개비가 있으므로 $m=\sum^{x\in V} d(x)$이고 $m=\sum^{x\in V} d(x)=2e$를 얻는다.

② 그래프에서 홀수점의 합은 짝수이다.

(증명) 홀수점들의 차수의 합을 x, 짝수점들의 차수의 합을 y라 하면 $x+y=2e$이고, y가 짝수이므로 $x=2e-y$에서 x도 짝수이다.

(증명2)

그래프의 홀수점을 $x_1, x_2, \cdots, x_p$, 짝수점을 $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_{p+q}$라하면

$$2e \;=\; d(x_1)+\cdots+d(x_p)+d(x_{p+1})+\cdots+d(x_{p+q})$$

짝수 홀수 홀수 짝수

여기에서 $d(x_1)+\cdots+d(x_p)$는 짝수이어야 하므로 홀수점의 개수 p는 작수이다.

ex)어떤 모임에서 홀수번 악수한 사람의 수는 짝수이다.

ex)7개의 팀이 출전하는 어떤 축구 시합에서 모든 팀이 홀수번 시합할 수 있게 대진표를 짜는 것은 불가능하다.

③ 위수가 2개 이상의 그래프에서는 차수가 같은 꼭짓점은 2개 이상 존재한다.

- 차수가 0인 점이 있다면 $n-1$인 점이 있을 수 없다.
- 꼭짓점이 n개인 점에서 그들에 대응하는 차수는 많아야 n-1가지 이므로 비둘기집에 의하여 적어도 두 꼭짓점은 같은 차수를 갖는다.

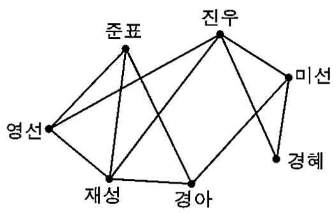
2. 차수의 합= 변의개수의 합 $\times 2$ = 인접행렬의 성분의 합

= 인접행렬의 제곱의 대각성분의 합

3. 문제를 이해하는 구조

대상 (꼭짓점) 대상의 합 (위수)	인접 =1:1대응 = 악수, 전화(통화),경기, 시합, 교우관계, 선분 (변)	인접의 횟수(=차수) 인접의 횟수의 합 (=차수의 합)

예) 교우관계 그래프



⇒ 연기자들의 모임에서 같은 작품에 출연한 사람끼리 변으로 연결할 수 있다.
또 같이 출연한 작품 수만큼 변을 그어 나타내면 누가 누구와 같은 작품에 자주 출연하는지를 알 수 있다.

준표,영선, 진우,재성,경아,경혜,미선은 꼭짓점이다.

연결된 선을 교유관계라고 하면 이것은 변이다.

[예제]

어느 학급의 학생 35명은 어느 날 방과 후에 다음과 같이 서로 전화 통화를 하기로 하였다.

> (가) 이 학급의 학생끼리만 전화를 걸거나 받을 수 있다.
> (나) 한 번 통화를 한 학생끼리는 다시 통화하지 않는다.

다음 날 학교에 등교하여 전날 각자 통화한 사람의 수를 각각 조사하였을 때, 〈보기〉중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. 35명이 각각 통화한 학생 수의 총합은 항상 짝수이다.
ㄴ. 통화한 횟수가 짝수인 학생의 수는 항상 짝수이다.
ㄷ. 통화한 횟수가 홀수인 학생의 수는 항상 짝수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

정답 ④

개념잡기 같은 그래프 (동형<isomorphic>)

위수가 같고 꼭짓점 사이의 인접성이 같은 두 그래프는 동형, 같은 그래프이다.
같은 그래프는 차수의 배열이 같다. 그 역은 성립하지 않는다.

①

같은 그래프 $\Rightarrow$ 위수와 차수(배열)가 같다 (O)
위수와 차수(배열)가 같다 $\Rightarrow$ 같은 그래프이다 (X)

② 같은 그래프를 판별하는 방법

< 일반적으로 아래와 같은 순서에 의해서 확인이 가능하다>

i) 점의 위치나 변의 변형을 통하여 눈으로 확인
(입체적으로 볼 때 잘보이는 경우도 있다.)

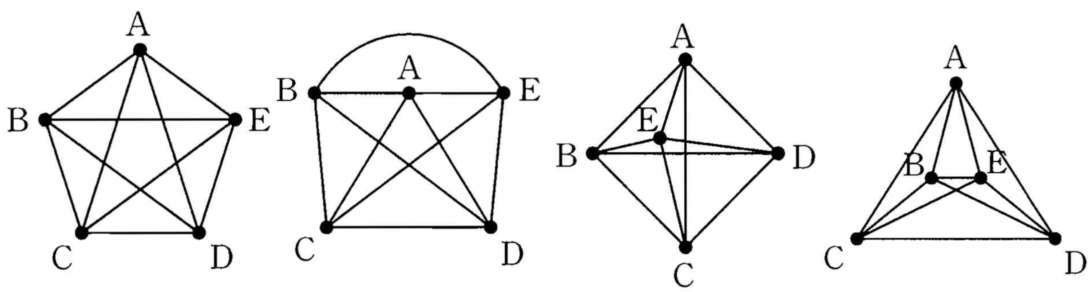
ii)위수와 차수의 배열이 같은지 확인한다.

iii)부분그래프를 이용하여 회로의 길이가 같은지 확인한다.

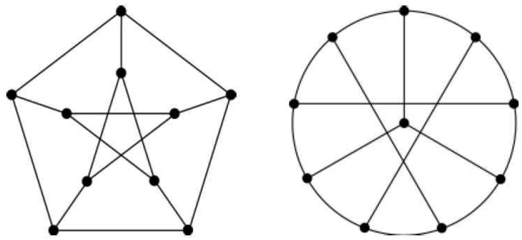
iv) 부분그래프의 연결된 인접성을 확인한다.
$G_1 + G_2$와 $G_1' + G_2'$에서 연결관계 체크

ex)아래의 인접행렬과 같은 그래프를 그린 것이다.

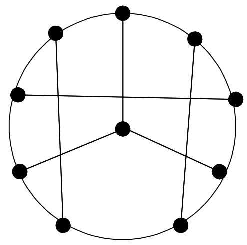
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



ex)아래의 두 그래프는 같은 그래프인가?



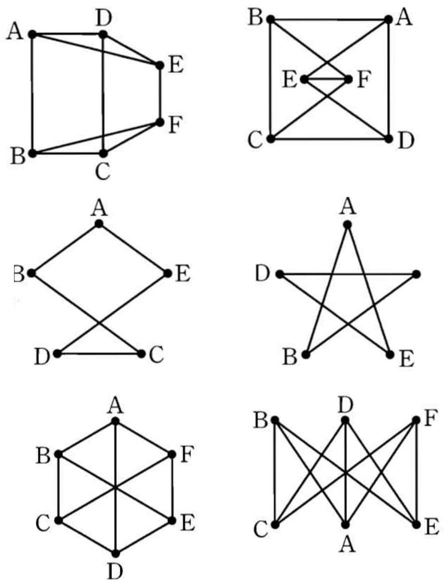
$\neq$



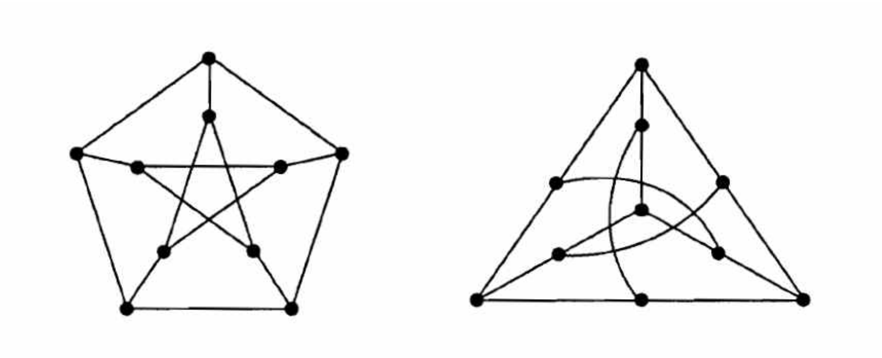
위와 같은 그래프를 **피터슨 그래프**라고 부른다.

: 다양한 반례를 만들어 준다. 기억하면 편한 그래프

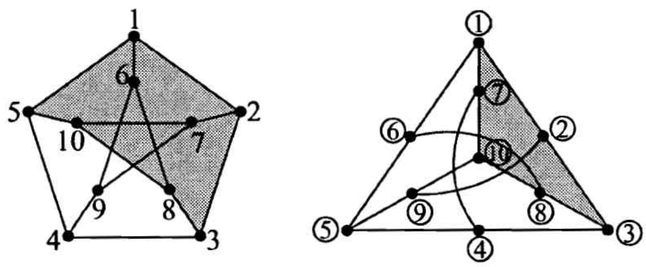
ex)



다음 그래프가 같음을 보여라



아래와 같이 각 꼭지점에 번호를 붙여 구별하자



다음과 같이 대응시키면 동형사상이 된다.
삼각형 이에 ①②③⑧⑩⑦로 여섯 개의 꼭짓점이 있으므로 왼쪽에서도 1,2,3,8,10,5를 잡아 순서대로 대응시켜 놓고 다음에 남은 것을 맞게 대응시키면 된다.
또 하나는 큰 삼각형 위에 ①②③④⑤⑥이 있으므로 1,2,3,4,9,6을 잡아서 대응을 고려하여 대응 시키면 된다.

1→①, 2→②, 3→③, 4→④, 5→⑦, 6→⑥, 7→⑨, 8→⑧,
9→⑤, 10→⑩. ■

개념잡기 경로와 회로

한 꼭짓점에서 이어진 변을 따라 다른 꼭짓점으로 연결하는 길(walk)을 경로라고 한다.
이때, 연결된 변의 수가 n이면 길이가 n인 경로라고 한다.

경로$(path)$: 그래프이 한 꼭짓점에서 이어진 변을 따라 다른 꼭짓점으로 연결하는 길
즉, 같은 변을 다시 지나지 않고 이동한 꼭짓점과 변의 순서로
지나간 꼭짓점을 순서대로 나열해서 나타낸 것이다.

단순경로: 변이 중복되지 않는 경로를 단순경로라고 한다.

회로: 한 꼭짓점에서 출발하여 이 꼭짓점으로 돌아오는 경로를 회로라고 한다.
또, 변이 중복되지 않는 회로를 단순회로라고 한다.

길이(length) : 경로를 이루는 변의 개수

개념잡기 한붓그리기

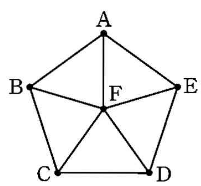
임의의 두 꼭짓점을 연결하는 경로가 존재하면 연결된 그래프라고 한다.

한붓그리기가 가능한 그래프
: 연결된 그래프가 연필을 떼지 않고 모든 변을 한 번씩만 지나면서 그릴 수 있을 때 한붓그리기가 가능한 그래프라고 한다.

①(한붓그리기가 가능한 그래프는 연결된 변의 개수가 홀수인(차수가 홀수)꼭짓점이 0개이거나 2개이다.
② 연결된 그래프중에서 모든 변을 지나는 단순경로가 있는 그래프

오일러경로 : 차수가 홀수인 점이 2개이면, 한 점은 시작점이고, 나머지 한 점은 도착점이다.
오일러회로 : 차수가 홀수인 점이 0개이면(차수가 모두 짝수인 점) 시작점과 도착점이 같다.

$ex)$
(1) 꼭짓점A에서 C로 가고 길이가 3인 경로를 모두 구하여라
$ABFC$, $AFBC$, $AFDC$, $AEFC$, $AEDC$
(2) 꼭짓점A에서 시작하고 길이가 4인 단순회로를 모두 구하여라.
$ABCFA$, $AFCBA$, $AFDEA$, $AEDFA$, $ABFEA$, $AEFBA$



개념잡기 인접행렬

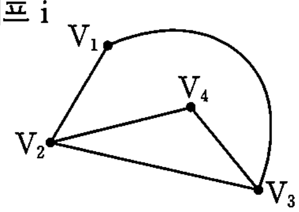
인접행렬 $A=(a_{ij})$

그래프의 꼭짓점이 $V_i(i=1,2,3\cdots,n)$이고, 두 꼭짓점 V_i와 V_j를 연결하는 변의수가 a_{ij}일 때, n차 정사각행렬 $A=(a_{ij})$를 그래프의 인접행렬이라고 한다.

① 인접하면 1, 인접하지 않으면 0으로 각 성분은 음 아닌 정수이다.
② 성분의 합 = 차수의 합 = 변의개수의 2배 = 인접행렬의 제곱의 대각성분의 합
③ 대칭행렬$(a_{ij}=a_{ji})$이다 $\Leftarrow$ 인접행렬
④ 행 혹은 열의 합은 그 꼭짓점의 차수
⑤ A^k의 (i,j)성분은 꼭짓점 V_i와 V_j로 가고 길이가 k인 경로의 개수이다.
⑥ 인접행렬의 제곱에서 대각성분의 합은 그 꼭짓점의 차수를 의미한다.

$ex)$

그래프 i



$$\begin{array}{c|c} & V_1\ V_2\ V_3\ V_4 \\ \begin{matrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array} \qquad A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

V_1에서 V_4로 길이가 2인 경로의 수는

$V_1 \xrightarrow[a_{12}(\text{개})]{} V_2 \xrightarrow[a_{24}(\text{개})]{} V_4$, $V_1 \xrightarrow[a_{13}(\text{개})]{} V_3 \xrightarrow[a_{34}(\text{개})]{} V_4$ 에서 $a_{12}a_{24}+a_{13}a_{34}$이다.

인접행렬의 제곱

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&3&2&1\\1&2&3&1\\2&1&1&2\end{pmatrix}$$

경로의 수 구조 $V_i \xrightarrow[a_{ik}(\text{개})]{} V_k \xrightarrow[a_{kj}(\text{개})]{} V_j$

⑦ 변을 k번 거쳐서 이동한 경로의 수를 구할 때
i)인접행렬을 A^k을 구한다.(전체를 한 번에 구할 때 추천)
ii)직접 수형도를 그려서 찾아낸다. (필요한 부분만 구할 때 추천)

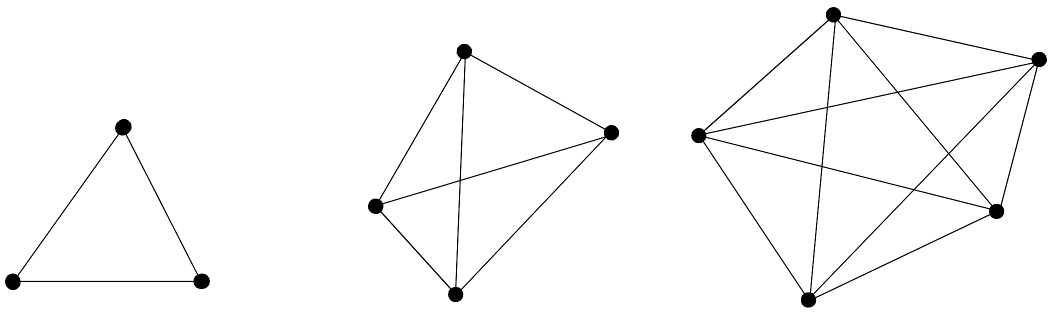
개념잡기 그래프의 종류

단순그래프: 고리(loop:다중변)이 없는 그래프로, 차수가 $0 \sim n-1$ 인 그래프

완전그래프(complete)

어떠한 두 꼭짓점도 인접한 단순그래프를 완전그래프라고 하고,
위수가 n인 완전그래프를 K_n 으로 나타낸다.

① 변의 개수 : ${}_nC_2$개다.
② 차수의 합: $2 \times {}_nC_2 = n(n-1)$
③ 완전그래프를 채색하기 위한 필요한 색의 수는 n개다.
(새로운 점이 추가되어도 기존의 모든 점과 연결이 되어 있어서 늘 새로운 색이 필요)
④ 임의의 2개의 변을 거치는 경로의 수= 임의의 3개의 점을 거치는 경로의 수
: ${}_nP_3 = n(n-1)(n-2)$



K_3 K_4 K_5 …

정칙그래프(Regular Graph)
: 모든 꼭짓점의 차수가 같은 그래프
ex) 차수가 3인 정칙그래프는 입방체 그래프이다.

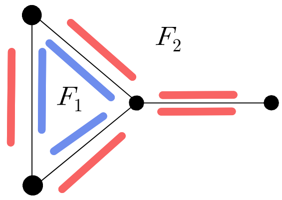
개념잡기 평면그래프

평면그래프(planar Graph):변이 겹쳐지지 않게 평면 위에 그릴 수 있는 그래프
(변의 교점이 꼭짓점에서 생길수 있는 그래프)
※plane graph : 변이 겹쳐지지 않게 그려진 그래프
(변의 교점이 꼭짓점에서만 생기는 그래프)

성질

1) 연결된 평면그래프는 $v-e+f=2$가 성립(오일러 정리)
v:꼭짓점개수 ,e:변의개수 ,f:평면그래프에 의해 나누어진 영역의 개수

2) 평면그래프에서 면의 차수의 합은 변의수의 2배이다.
※ 면의 차수 $d(F)$
: 평면그래프의 면F의 변쪽에 있는 가장자리의 수를 F의 차수라고 하고, $d(F)$라고 나타낸다.



(증명)
면의 변쪽에 있는 가장자리를 그 면의 날이라고 하고, 날의 개수 m을 구하여 보자
각 변마다 2개의 날이 있으므로 $m=2e$

각 면F에 $d(F)$개의 날이 있으므로 $m=\sum^{F}d(F)$, 단 $\sum$마는 모든 면에 관한 합이다.

따라서, 등식 $\sum^{F}d(F)=2e$를 얻는다.

3) 평면성의 판정법

G가 위수 3이상의 연결 평면 단순그래프이면 $v-\frac{e}{3}\geq 2$가 성립한다.

그래프가 이분 그래프이면 $v-\frac{e}{2}\geq 2$가 성립한다.

(증명)
그래프가 $v\geq 3$이상의 연결 평면 단순그래프이면 모든면의 차수는 3이상이다.

따라서 $\sum^{F}d(F)=2e>3f$이고, $\frac{e}{3}\geq f$이다.

$v-e+f=2$로부터 $2=v-e+f\leq v-e+\frac{2e}{3}=v-\frac{e}{3}$ 따라서, $v-\frac{e}{3}\geq 2 \Leftrightarrow 3(v-2)\geq e$가 성립한다.

그래프가 이분 그래프이면 각 회로의 길이가 4이상이므로 각면의 차수가 또한 4이상고 따라서 $2e\geq 4f$이다. 즉, $\frac{e}{2}\geq f$이다

그러므로 $2 = v - e + f \geqq v - e + \frac{e}{2} = v - \frac{e}{2}$가 성립한다. $\Leftrightarrow 2(v-2) \geqq e$

예 제

다음그래프는 평면 그래프가 아님을 증명하라

(1) K_5 (2) $K_{3,3}$

(1)에서 $v=5$, $e = \binom{5}{2} = {}_5C_2 = 10$이다. $3(v-2) \geqq e$에 의해

$3(5-2) = 9 \geqq 10$이므로 모순 따라서, K_5는 평면그래프가 아니다.

(2) $K_{3,3}$은 $v=6, e=9$인 이분그래프이다. $2(v-2) \geqq e$에 의해서

$2(6-2) = 8 \geqq 9$이므로 모순. 따라서 $K_{3,3}$은 평면 그래프가 아니다.

4) 연결 평면 그래프에는 차수가 5이하인 꼭짓점이 존재한다.

그래프가 평면그래프이면 로부터 $v - \frac{e}{3} \geqq 2$로부터 이다. $v - \frac{e}{3} \geqq 0$

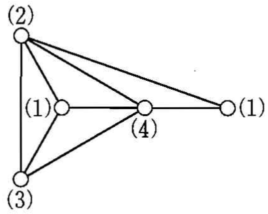
5)쿠라토우스키(Kutatowski)정리

그래프가 평면그래프일 필요 충분 조건은 그래프가 K_5, $K_{3,3}$ 또는 $K_5, K_{3,3}$의 부분분할과 동형인 그래프를 가지지 않을 것이다.

개념잡기 채색(색칠하기)

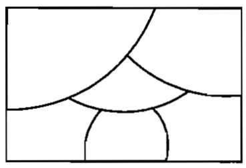
- 그래프의 꼭짓점을 k개의 색으로 색칠할 수 있을 때, 그래프는 k채색가능이라고 한다.
- 위수가 v인 그래프는 v-채색가능이다.
- 완전그래프(k_n)를 채색하기 위한 최소의 채색수는 n이다.

ex)그래프에서 연결도니 두 꼭짓점은 서로 다른 색으로 구분하려고 할 때, 최소의색을 사용하려면 4종류의 색을 써서 칠하면 된다.



ex)

오른쪽 그림과 같이 경계가 주어진 지도가 있다. 경계가 닿아 있는 지역은 서로 다른 색을 칠하여 구분하려고 할 때, 필요한 색의 수의 최솟값을 구하려고 한다.

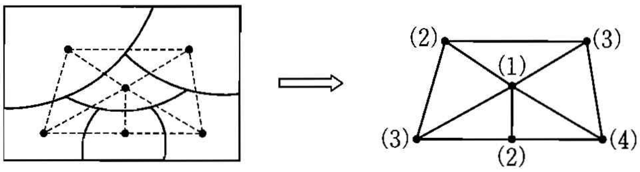


(1) 나누어진 영역을 꼭짓점으로 하고 경계가 닿은 두 영역을 나타내는 꼭짓점을 변으로 연결하여 그래프를 그려라.

(2) (1)에서 구한 그래프를 이용하여 필요한 색의 수를 구하여라.

정답 (1) 풀이참조　　(2) 4가지

(1)



(2) 위의 오른쪽 그림과 같이 색을 정하면 되므로 4가지

개념넓히기 해밀턴회로와 수형도

해밀턴 회로

① 연결된 그래프에서 모든 꼭짓점을 오직 한번만 지나고 시작점으로 돌아오는 회로

② 꼭짓점의 개수가 $n(n>2)$개이고, 각 꼭짓점의 차수가 $\frac{n}{2}$이상인 연결된 그래프는 해밀턴 회로를 갖는다.
(차수만을 비교하여 해밀턴 그래프의 존재성을 확인하는 것은 불가능하다)

③ 위수가 $n \geqq 3$인 단순그래프가 해밀턴그래프일 충분조건은
인접하지 않는 꼭짓점들의 모든 쌍에 대한 차수의 합이 적어도 n이상일 때이다.
즉,
$G=(V,E)$, $\{a,b\} \not\in E \Rightarrow d(a)+d(b) \geqq n$이면 해밀턴 그래프이다.

수형도 (tree)

회로를 갖지 않는 연결된 그래프 (단말점<차수=1>인점을 갖는 그래프)

① $v-e=1$이 항상 성립한다.
② 수형도에서 차수의 합 $e=2(v-1)$
즉, $e=v-1$인 그래프는 2개의 단말점을 갖는다.
③ 토너먼트의 경기수: 팀수-1
⇒ 차수가 1인 점을 제외한 꼭짓점의 개수의 합

연습문제

1.

꼭짓점의 개수가 7인 그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 1, 2, 3, 4, 5, 6, n일 때, n의 값을 구하여라.

2.

꼭짓점의 개수가 v, 변의 개수가 e인 그래프의 각 꼭짓점의 차수의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $m \le \dfrac{e}{3v} \le M$　② $m \le \dfrac{e}{2v} \le M$　③ $m \le \dfrac{e}{v} \le M$

④ $m \le \dfrac{2e}{v} \le M$　⑤ $m \le \dfrac{3e}{v} \le M$

3.

그래프의 꼭짓점의 집합을 P, 변의 집합을 Q라 할 때, $n(Q)=66$이다. 이때, $n(P)$의 최솟값을 구하여라.(단, $n(P)$는 집합 P의 원소의 개수이다.)

4.

그래프 G는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 꼭짓점으로 하고, 약수 또는 배수 관계에 있는 서로 다른 두 꼭짓점을 연결한 선 모두를 변으로 한다. 그래프 G에서 차수가 3인 꼭짓점의 개수를 구하여라.

5.

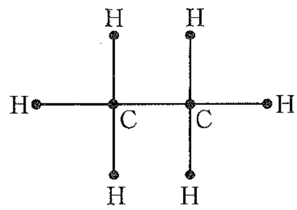
꼭짓점과 변의 개수가 각각 5, 6 인 그래프가 있다. 이 그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2, 3, 3, a, b 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, $a<b$)

6.

18개의 변을 가진 어떤 그래프에서 연결된 변의 개수가 2, 4, 5인 꼭짓점이 각각 3개, a개, b개 있을 때, 두 자연수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 2, 4, 5뿐이다.)

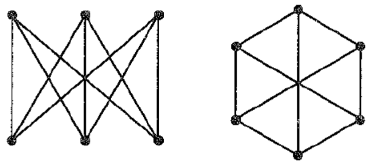
7.

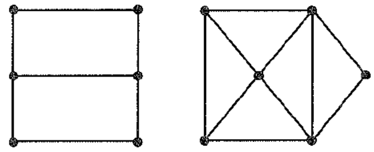
어떤 화합물에서 원자들을 꼭짓점으로 나타내고, 결합되어 있는 두 원자를 변으로 연결하면 그래프가 된다. 예를 들어 C_2H_6를 오른쪽 그림과 같이 그래프로 나타내면 두 꼭짓점 C, H가 각각 2개, 6개이고, 변의 개수가 7이다. 포화탄화수소 C_kH_{2k+2}를 나타내는 그래프의 변의 개수가 25일 때, 이 화합물의 수소 원자 H의 개수를 구하시오.
(단, 어떤 원자가 다른 원자와 결합하는 수를 원자가라 할 때, 탄소 C의 원자가는 4, 수소 H의 원자가는 1이다.)

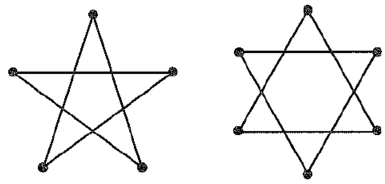


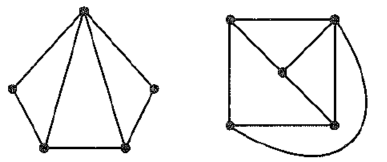
8.

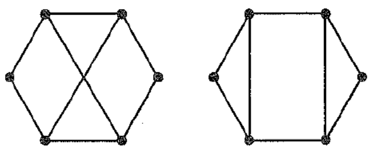
다음 중 서로 같은 그래프끼리 짝지어진 것은?

①


②


③


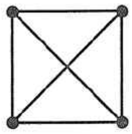
④


⑤


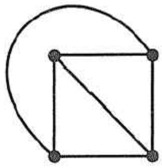
9.

다음 중 다른 네 그래프와 같은 그래프가 아닌 한 그래프는?

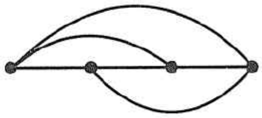
①



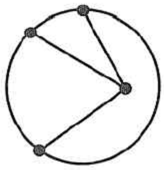
②



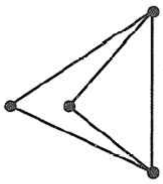
③



④



⑤



10.

어느 학급의 학생 35명은 어느 날 방과 후에 다음과 같이 서로 전화 통화를 하기로 하였다.

(가) 이 학급의 학생끼리만 전화를 걸거나 받을 수 있다. (나) 한 번 통화를 한 학생끼리는 다시 통화하지 않는다.

다음 날 학교에 등교하여 전날 각자 통화한 사람의 수를 각각 조사하였을 때, 〈보기〉중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보 기
ㄱ. 35명이 각각 통화한 학생 수의 총합은 항상 짝수이다. ㄴ. 통화한 횟수가 짝수인 학생의 수는 항상 짝수이다. ㄷ. 통화한 횟수가 홀수인 학생의 수는 항상 짝수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11.

전체 가구 수가 10인 어느 동네에서 서로 알고 지내는 가구 수에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 다른 가구를 하나도 모르는 가구가 반드시 있다.
② 다른 9가구를 알고 지내는 가구가 반드시 있다.
③ 다른 5가구를 알고 지내는 가구가 반드시 두 가구 이상 있다.
④ 모든 가구가 다른 가구를 적어도 하나는 알고 있다.
⑤ 알고 지내는 가구의 수가 똑같은 두 가구가 반드시 존재한다.

12.

회원 20명이 모인 어느 모임에서 아는 사람끼리 서로 악수를 한 후 각 회원이 악수한 횟수를 조사하였다. 이때 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 한 번 악수를 한 회원끼리는 다시 악수하지 않는다.)

| 보 기 |

ㄱ. 20명의 회원이 각각 악수를 한 횟수의 총합은 항상 짝수이다.
ㄴ. 악수를 하는 방법의 수는 190을 초과할 수 없다.
ㄷ. 악수를 한 횟수가 홀수인 회원의 수는 항상 짝수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13.

A, B, C, D 네 사람이 모여 악수를 한 결과에 대한 설명 중 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 한 번 악수를 한 사람끼리는 다시 악수하지 않는다.)

| 보 기 |

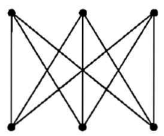
ㄱ. 네 사람이 악수를 한 횟수가 각각 2, 1, 2, 3인 경우가 존재한다.
ㄴ. 네 사람이 악수를 한 횟수가 각각 1, 2, 2, 1이면 악수를 한 방법의 수는 6이다.
ㄷ. 네 사람이 악수를 한 횟수가 모두 2인 경우가 존재한다.

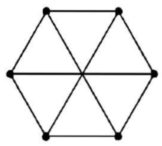
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

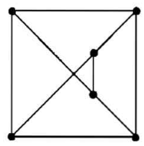
14.

행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$을 인접행렬로 가질 수 있는 그래프를 <보기>에서 모두 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15.

오른쪽은 5개의 꼭짓점이 A, B, C, D, E 인 어느 그래프의 인접행렬이다.

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 그래프에 대한 <보기>의 설명에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. 변의 개수는 8이다.
ㄴ. 차수가 3인 꼭짓점의 개수는 4이다.
ㄷ. 꼭짓점 A와 꼭짓점 C를 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로의 개수는 2이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16.

연결 관계가 오른쪽 행렬로 나타내어지는 그래프의 꼭짓점의 개수를 a, 변의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17.

연결 관계가 오른쪽과 같은 행렬로 나타내어지는 그래프에 대한 설명 중 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_4 & \mathrm{A}_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{A}_4 \\ \mathrm{A}_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

| 보 기 |

ㄱ. 그래프의 변의 개수는 7이다.
ㄴ. 다른 모든 꼭짓점과 변으로 연결된 꼭짓점이 존재한다.
ㄷ. 모든 변을 한 번씩만 지나는 경로가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18.

연결 관계가 오른쪽 행렬로 나타내어지는 그래프에 대한 설명 중 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

| 보 기 |

ㄱ. 그래프의 변의 개수는 9이다.
ㄴ. 모든 변을 한 번씩만 지나 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 경로가 존재한다.
ㄷ. 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 경로가 존재한다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19.

꼭짓점이 A, B, C, D, E의 5개인 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변은 없다.
(나) 서로 다른 두 꼭짓점을 연결하는 변은 1개 이하이다.
(다) 서로 다른 두 꼭짓점을 연결하는 경로가 반드시 존재한다.

꼭짓점 A, B, C, D, E에 연결된 변의 개수가 각각 a, b, 1, 2, 3일 때, a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하여라.

20.

꼭짓점의 개수가 n $(n \geq 2)$이고, 서로 다른 두 꼭짓점을 연결하는 변이 반드시 한 개씩 존재하는 그래프를 K_n이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변은 없다.)

ㄱ. 그래프 K_6의 변의 개수는 15이다.
ㄴ. 그래프 K_7의 한 꼭짓점에서 출발하여 서로 다른 2개의 변을 지나는 경로의 수는 210이다.
ㄷ. 그래프 K_n의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 $n(n+1)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21.

연결 관계가 다음 행렬로 나타내어지는 그래프 중 어떤 한 꼭짓점에서 출발하여 다른 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나서 출발점으로 돌아오는 경로가 존재하는 것은?

① $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22.

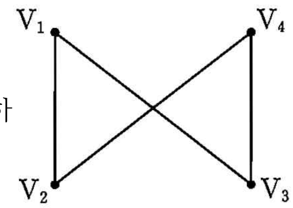
오른쪽 그래프에 대하여 다음 각 물음에 답하여라.

(1) 이 그래프의 인접 행렬을 M이라고 할 때, M, M^2, M^3, M^4을 구하여라.

(2) 꼭짓점 A와 B 사이에 길이가 4인 방법의 수를 구하여라.

(3) 행렬 M^n을 유추하고, n이 홀수일 때 꼭짓점 A와 B 사이에 길이가 n인 경로가 없음을 보여라.

23.



오른쪽 그래프에 대하여 다음 각 물음에 답하여라.

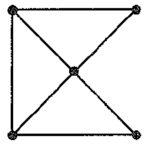
(1) 이 그래프의 인접행렬을 A라고 할 때 A, A^2, A^3, A^4을 구하여라.

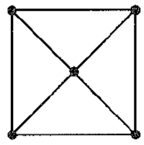
(2) 꼭짓점 V_1과 V_4 사이에 길이가 4인 경로의 수를 구하여라.

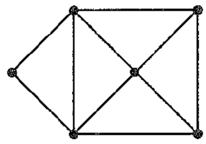
(3) 행렬 A^n을 유추하고, n이 홀수일 때 꼭짓점 V_1과 V_4 사이에 길이가 n인 경로가 없음을 보여라.

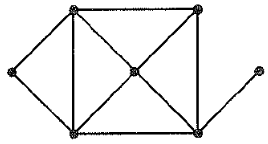
24.

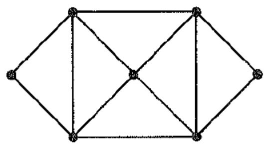
다음 그래프 중 어느 한 꼭짓점에서 출발하여 모든 변을 한 번씩만 지나고 다시 이 꼭짓점으로 돌아오는 경로가 존재하는 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

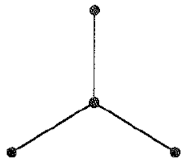
25.

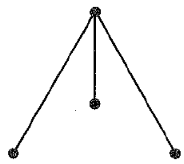
어떤 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬이 A일 때,

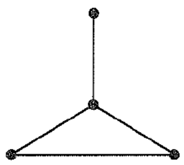
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

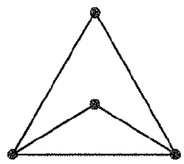
이다. 다음 중 연결 관계가 행렬 A로 나타내어지는 그래프는?

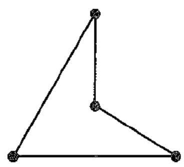
(단, 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변은 없고, 서로 다른 두 꼭짓점을 연결하는 변은 1개 이하이다.)

①


②


③


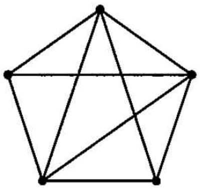
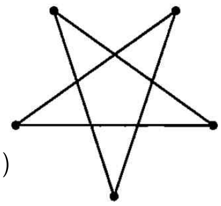
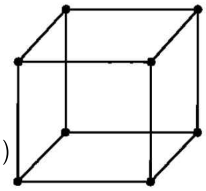
④


⑤


평면그래프

26.

다음 각 그래프의 변이 서로 만나지 않게 그려라.

(1)  (2)  (3) 

27.

오른쪽은 다섯 개의 축구팀이 리그전에서 거둔 성적을 나타낸 표이다. 단, 승, 패는 가로줄에 있는 팀의 성적이다.

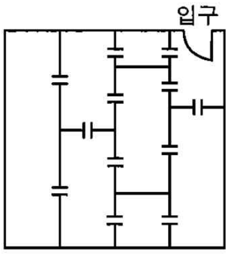
	F_2	F_3	F_4	F_5
F_1	승	승	패	승
F_2		패	승	승
F_3			패	승
F_4				승

(1) F_i팀이 F_j팀을 이긴 경우 $(i,\ j)$ 성분이 1, 지거나 경기를 하지 않은 경우 $(i,\ j)$ 성분이 0인 행렬 A를 구하여라.

(2) F_j팀이 F_j팀에게 이긴 경우 $F_j \to F_i$로 나타낼 때, 다섯 팀의 승패를 그래프로 나타내어라.

(3) (1)에서 구한 행렬에서 성분의 합은 무엇을 뜻하는가?

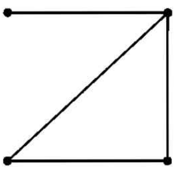
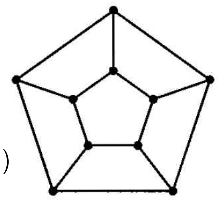
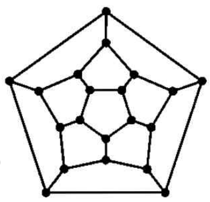
28.



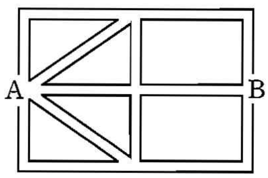
오른쪽 그림과 같은 구조로 된 미술관이 있다. 입구로 들어가 모든 문을 한 번씩만 지나 밖으로 나갈 수 있도록 출구를 만들려고 한다. 출구를 어느 방에 만들어야 하는가?

29.

다음 각 그래프에서 모든 꼭짓점을 한 번만 지나서 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 경로가 있는가? 있으면 그 경로를 하나 구하여라.

(1)  (2)  (3) 

30.



오른쪽 그림과 같은 전시장에서 모든 길을 한 번만 지나려고 한다.

(1) A에서 시작하여 B로 나가는 단순경로가 있는가?

(2) A에서 시작하여 A로 돌아오는 단순경로가 있는가?

31.

다음 각 물음에 답하여라.

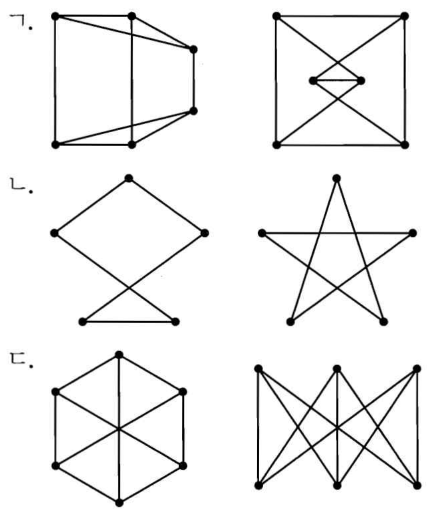
(1) 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 모두 다른 그래프가 있는가?
(단, 두 꼭짓점 사이에 변은 많아야 한 개다.)

(2) 9명이 모여서 서로 악수를 하였다. 모든 사람이 5번씩 악수할 수 있는가? 단, 같은 사람끼리 2번 이상 악수를 하지는 않았다고 한다.

32.

보기에서 서로 같은 그래프끼리 짝지어진 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33.

꼭짓점과 변의 개수가 모두 5인 그래프가 있다. 이 그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2, 2, 3, a, b일 때, $10a+b$의 값을 구하여라. (단, $a < a \leq b$)

34.

어느 펜싱 대회에서 1조와 2조에 각각 4명, a명의 선수가 속해 있다고 한다. 각 선수가 자신이 속한 조의 다른 선수와 한 번씩 경기를 치르는 리그전을 할 때, 두 조에서 치르는 경기의 수의 합이 16이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 1조가 치르는 경기의 수를 구하여라.
(2) a의 값을 구하여라.

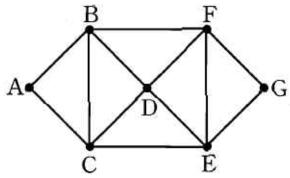
35.

꼭짓점의 개수가 6인 그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 1, 2, 3, 4, 5, n일 때, n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

36.

오른쪽 그래프에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



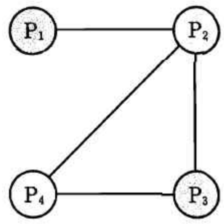
<보 기>

ㄱ. 꼭짓점의 개수와 변의 개수의 합은 19이다.
ㄴ. 꼭짓점 A에서 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나서 꼭짓점 G 로 가는 경로의 수는 8이다.
ㄷ. 꼭짓점 A에서 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나서 꼭짓점 A 로 되돌아오는 경로의 수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37.

오른쪽 그림은 네 지역 P_1, P_2, P_3, P_4를 연결하는 도로망을 나타낸 것이다. P_i지역에서 P_j지역으로 다른 지역을 거치지 않고 갈 수 있는 도로의 개수를 (i, j) 성분으로 하는 행렬을 A라 하자. 다음 물음에 답하여라.



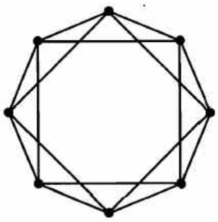
(1) 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하여라.
(2) 행렬 A^2을 구하여라.
(3) 행렬 $A+A^2$을 이용하여 P_2지역에서 출발하여 도로를 1개 또는 2개를 지나서 P_3지역으로 가는 경로의 수를 구하여라.

38.

그래프의 꼭짓점의 집합을 P, 변의 집합을 Q라 할 때, $n(Q)=45$이다. 이때 $n(P)$의 최솟값을 구하여라.
(단, $n(P)$는 집합 P의 원소의 개수이다.)

39.

오른쪽 그래프에서 선분으로 연결된 꼭짓점은 서로 다른 색으로 구분하여 색칠할 때, 필요한 최소 색의 수를 구하여라.



1. 정답 3

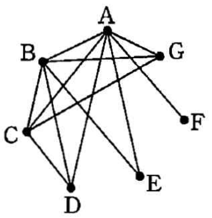
접근방법

꼭짓점의 개수가 7인 그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 주어져 있으므로, 꼭짓점 7개를 표시한 후 주어진 변의 개수대로 꼭짓점끼리 연결해봅니다.

이때, 연결된 변의 개수가 큰 것부터 그리는 것이 편리합니다.

상세풀이

꼭짓점을 A, B, C, D, E, F, G로 놓고 꼭짓점 A, B, C, D, E, F에 연결된 변의 개수가 각각 6, 5, 4, 3, 2, 1인 그래프를 그리면 다음 그림과 같습니다.



따라서 나머지 꼭짓점 G에 연결된 꼭짓점의 개수는 3이므로

$n=3$

2. 정답 ④

접근방법

모든 꼭짓점의 차수의 총합은 변의 개수의 2배와 같다는 것을 이용합니다.

상세풀이

각 꼭짓점의 차수의 최댓값과 최솟값이 각각 M, m이므로 모든 꼭짓점의 차수의 총합을 S라 하면

$mv \le S \le Mv$

그런데 모든 꼭짓점의 차수의 총합은 변의 개수의 2배와 같으므로

$S=2e$

$\therefore\ mv \le 2e \le Mv$

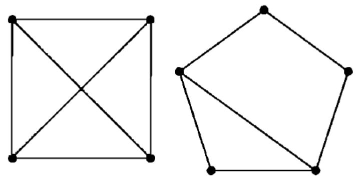
각 변을 v로 나누면

$m \le \dfrac{2e}{v} \le M$

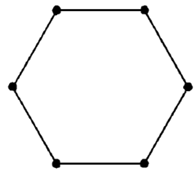
3. 정답 12

접근방법

다음 그림은 변의 개수가 6개인 그래프들입니다.



[그림1] [그림2]



[그림3]

이 중에서 꼭짓점의 개수가 최소가 되는 경우는 [그림1]처럼 한 꼭짓점이 다른 꼭짓점들과 모두 연결된 경우입니다.

상세풀이

꼭짓점의 개수가 최소일 때는 각 꼭짓점이 다른 모든 꼭짓점과 변으로 연결되어 있을 때입니다.

따라서 그래프의 꼭짓점의 개수를 a라 하면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 $a-1$이므로

$\dfrac{a(a-1)}{2}=66$, $a^2-a-132=0$

$(a+11)(a-12)=0$

$\therefore\ a=12$ ($\because$ a는 자연수)

보충설명

꼭짓점의 개수가 최대일 때는 다음 그림과 같이 모든 꼭짓점들이 일렬로 연결되어 있을 때입니다.

즉, 변의 개수가 5개인 그래프 중에서 꼭짓점의 개수의 최댓값은 6입니다.

이와 같은 원리로 $n(Q)=66$일 때, $n(P)$의 최댓값은 67입니다.

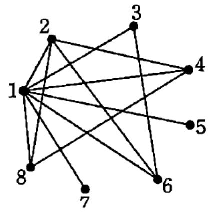
4. 정답 3

접근방법

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 양의 약수를 차례로 구해 그래프를 그리거나 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 양의 배수를 차례로 구해 그래프를 그려도 됩니다.

상세풀이

약수 또는 배수 관계에 있는 서로 다른 두 꼭짓점을 모두 변으로 연결한 그래프는 다음과 같습니다.



따라서 차수가 3인 꼭짓점은 4, 6, 8의 3개입니다.

보충설명

두 정수 a, $b\,(b \neq 0)$에 대하여 a가 b로 나누어 떨어질 때

a를 b의 배수, b를 a의 약수

라고 합니다.

b의 배수

$a=b\times$ (정수)

a의 약수

5. 정답 10

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$$2+3+3+a+b=2\cdot 6=12$$

$\therefore\ a+b=4$

이때 a, b는 자연수이고 $a<b$이므로

$a=1,\ b=3$

$$\therefore\ a^2+b^2=1^2+3^2=10$$

6. 정답 7

전략 : 그래프에서 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 그 그래프의 변의 개수의 2배와 같다.

연결된 변의 개수가 2, 4, 5인 꼭짓점이 각각 3개, a개, b개 있으므로 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은

$2\cdot 3+4\cdot a+5\cdot b=4a+5b+6$

이때 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$4a+5b+6=2\cdot 18=36$

$\therefore\ 4a+5b=30$

$4a+5b=30$을 만족시키는 자연수 a, b는

$a=5,\ b=2$

$\therefore\ a+b=7$

7. 정답 18

전략 : 탄소 C를 나타내는 꼭짓점에는 4개의 변이 연결되고, 수소 H를 나타내는 꼭짓점에는 1개의 변이 연결된다.

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은

$4k+(2k+2)=6k+2$

이것은 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$6k+2=2\cdot 25=50$

$\therefore\ k=8$

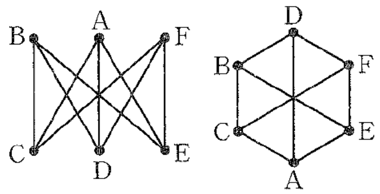
따라서 수소 원자 H의 개수는

$2\cdot 8+2=18$

8. 정답 ①

전략 : 꼭짓점과 변의 연결 상태가 변하지 않도록 꼭짓점의 위치를 바꾸어 보며 그래프를 비교한다.

① 오른쪽 그림과 같이 두 그래프의 꼭짓점을 A, B, C, D, E, F라 하면 두 그래프는 서로 같은 그래프이다.



② 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 조사해 보면 왼쪽 그래프는 2, 3, 2, 2, 3, 2이고, 오른쪽 그래프는 3, 3, 4, 2, 4, 4이므로 두 그래프는 같은 그래프가 아니다.

③ 꼭짓점의 개수가 일지하지 않으므로 두 그래프는 같은 그래프가 아니다.

④ 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 조사해 보면 왼쪽 그래프는 4, 2, 3, 3, 2이고, 오른쪽 그래프는 3, 3, 3, 4, 3이므로 두 그래프는 같은 그래프가 아니다.

⑤ 오른쪽 그래프에서는 세 꼭짓점이 연결되어 만들어진 삼각형이 2개 있지만 왼쪽 그래프에서는 삼각형이 만들어지지 않으므로 두 그래프는 같은 그래프가 아니다.

9. 정답 ⑤

①, ②, ③, ④의 변의 개수는 6, ⑤의 변의 개수는 5이므로 ⑤는 다른 네 그래프와 같은 그래프가 아니다.

10. 정답 ④

접근방법

한 통화 이상의 통화를 한 학생을 각각 서로 다른 꼭짓점으로 하고, 통화한 사람끼리 변으로 연결하여 만든 그래프를 생각합니다.

상세풀이

ㄱ. 35명 각각이 통화한 학생 수의 총합은 그래프의 모든 꼭짓점의 차수의 합과 같고, 이는 모든 변의 개수의 2배와 같으므로 항상 짝수입니다. [참]

ㄴ. 차수가 짝수인 꼭짓점의 개수는 짝수일 수도 있고, 홀수일 수도 있습니다. [거짓]

ㄷ. 모든 꼭짓점의 차수의 합은 짝수이고, 차수가 짝수인 꼭짓점의 차수의 합도 짝수이므로 차수가 홀수인 꼭짓점의 차수의 합도 짝수이어야 합니다.
따라서 통화한 학생 수가 홀수인 학생의 수는 항상 짝수입니다. [참]

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

보충설명

이와 같은 그래프는 다양하게 실생활에 응용될 수 있습니다.

예를 들어, 7명이 모여서 서로 악수를 하였을 때, 같은 사람끼리 2번 이상 악수를 하지는 않는다고 하면 모든 사람이 5번씩 악수할 수 있는지 없는지를 그래프를 이용하여 알 수 있습니다.

즉, 7명을 꼭짓점으로 하고, 악수를 한 사람끼리 변으로 연결한 그래프를 생각합니다. 이때, 모든 사람이 5번씩 악수하였다고 하면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 5개이므로 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 35입니다.

그런데 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 짝수이어야 하므로 이런 경우는 없습니다.

11. 정답 ⑤

접근방법

각 가구를 꼭짓점으로 생각하고, 서로 알고 지내는 가구끼리 변으로 연결한 그래프를 생각합니다.

상세풀이

각 꼭짓점의 차수는 최소 0에서 최대 9까지 가능하지만, 차수가 0인 꼭짓점이 있으면 차수가 9인 꼭짓점이 있을 수 없고, 반대로 차수가 9인 꼭짓점이 있으면 차수가 0인 꼭짓점이 있을 수 없습니다.

즉, 꼭짓점이 가지는 차수의 종류는 $0 \sim 8$ 또는 $1 \sim 9$의 9가지입니다.

따라서 ①, ②, ④는 거짓이며, 각 꼭짓점의 차수가 모두 4이하인 그래프도 존재하므로 ③도 거짓입니다.

한편, 꼭짓점의 수는 10이므로 어느 두 꼭짓점의 차수는 반드시 같을 수밖에 없습니다.

즉, 알고 지내는 가구의 수가 똑같은 두 가구가 반드시 존재합니다.

보충설명

오른쪽 그래프는 모든 가구가 알고 지내는 가구가 2가구인 그래프이므로 ③은 거짓입니다.

12. 정답 ⑤

한 번 이상 악수를 한 회원을 각각 서로 다른 꼭짓점으로 하고 서로 악수를 한 회원끼리 변으로 연결하여 그린 그래프를 생각하자.

ㄱ. 20명의 회원이 각각 악수한 횟수의 총합은 그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합과 같고, 이는 그래프의 변의 개수의 2배와 같으므로 항상 짝수이다.

ㄴ. 악수를 하는 횟수가 최대인 경우는 모든 회원들이 서로 악수를 하는 경우이다. 이때 각 회원은 각각 19명과 악수하게 되고, 한 번 악수한 횟수는 두 번씩 세어지므로 악수를 한 방법의 수의 최댓값은 $\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$이다.

ㄷ. 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 짝수이므로 연결된 변의 개수가 홀수인 꼭짓점의 개수는 반드시 짝수이어야 한다. 따라서 악수를 한 횟수가 홀수인 회원의 수는 항상 짝수이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ모두 옳다.

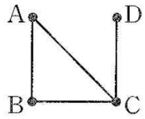
13. 정답 ③

[특작 쌤의 Key Point] 악수의 횟수에 관한 문제를 해결할 때에는 그래프를 이용한다. 이때 각 사람은 꼭짓점으로, 악수를 한 사람끼리는 변으로 연결하여 나타낸다.

[풀이] A, B, C, D네 사람을 각각 꼭짓점으로 하고 악수를 한 사람끼리 변으로 연결한 그래프를 생각해 보자.

ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2, 1, 2, 3인 그래프가 존재하므로 네 사람이 악수를 한 횟수가

각각 2, 1, 2, 3인 경우가 존재한다.

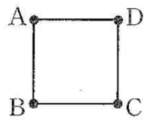


ㄴ. 네 사람이 각각 악수를 한 횟수의 합은 그래프에서 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합과 같고, 이것은 이 그래프의 변의 개수의 2배가 된다. 따라서 네 사람이 악수를 한 횟수가 각각 1, 2, 2, 1이면

$$\frac{1+2+2+1}{2}=3$$

에서 악수를 한 방법의 수는 3이다.

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 모두2인 경우가 존재하므로 네 사람이 악수를 한 횟수가 모두 2인 경우가 존재한다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14. 정답 ⑤

접근방법

인접행렬의 성분이 1이면 그래프에서 두 꼭짓점이 변으로 연결되어 있는 것이고, 성분이 0이면 두 꼭짓점이 변으로 연결되어 있지 않습니다.

상세풀이

주어진 인접행렬로 가질 수 있는 그래프는 6개의 꼭짓점들의 차수가 모두 3이므로 보기에서 주어진 그래프 모두 조건을 만족합니다.

15. 정답 ⑤

접근방법

인접행렬의 성질을 이용하여 풀어도 되지만 주어진 인접행렬을 이용하여 5개의 꼭짓점이 A, B, C, D, E인 그래프를 그려서 푸는 것이 편리합니다.

상세풀이

주어진 인접행렬을 이용하여 5개의 꼭짓점을 연결한 그래프를 그리면 오른쪽과 같습니다.

ㄱ. 변의 개수는

AB, AC, AD, BC, BE, CD, CE, DE

의 8개입니다. [참]

ㄴ. 꼭짓점 A, B, C, D, E의 차수는 각각

3, 3, 4, 3, 3

이므로 차수가 3인 꼭짓점은 A, B, D, E의 4개입니다. [참]

ㄷ. 꼭짓점 A에서 꼭짓점 C를 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로는

ABC, ADC

의 2개입니다. [참]

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

보충설명

ㄱ에서 인접행렬의 모든 성분의 합이 16이고, 이것은 변의 개수의 합의 2배입니다.

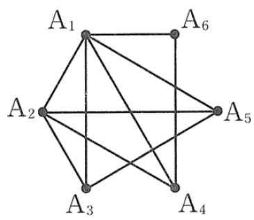
ㄴ에서 인접행렬의 각 행의 성분의 합은 각 꼭짓점의 차수와 같다는 것을 이용하여 풀어도 결과는 같습니다. 예를 들어, 주어진 인접행렬의 3행의 성분의 합이 4이므로 꼭짓점 C의 차수는 4입니다.

16. 정답 16

주어진 행렬의 행과 열을 각각

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6이라 하면

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{A}_4 \\ \mathrm{A}_5 \\ \mathrm{A}_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_4 & \mathrm{A}_5 & \mathrm{A}_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$



따라서 꼭짓점의 개수는 6, 변의 개수는 10이므로

$$a=6,\ b=10 \qquad \therefore\ a+b=16$$

[특별한 별해]

그래프의 꼭짓점의 개수는 행렬의 행 또는 열의 수와 같으므로 $a=6$

행렬의 성분의 합은 변의 개수의 2배이므로

$$2b=5+4+3+3+3+2=20$$

$$\therefore\ b=10$$

$$\therefore\ a+b=16$$

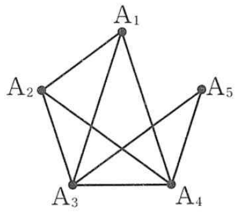
17. 정답 ④

ㄱ. 주어진 행렬의 모든 성분의 합은

그래프의 변의 개수의 2배와 같으므로
그래프의 변의 개수는

$$\frac{3+3+4+4+2}{2}=8$$

ㄴ. 주어진 행렬로 나타내어지는 그래프를 그리면 오른쪽과 같다. 따라서 두 꼭짓점 A_3, A_4는 다른 모든 꼭짓점과 변으로 연결되어 있다.



ㄷ. 오른쪽 그래프에서 모든 변을 한 번씩만 지나는 경로

$$A_1A_3A_5A_4A_2A_1A_4A_3A_2$$

가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[특별한 별해]

ㄴ. 주어진 행렬에서 제3행과 제4행은 $(i,\ i)$ 성분을 제외한 모든 성분이 1이므로 두 꼭짓점 A_3, A_4는 다른 모든 꼭짓점과 변으로 연결되어 있다.

ㄷ. 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 홀수인 꼭짓점이 두 개이므로 한붓그리기가 가능하다.

[참고]

ㄷ. 그래프에서 모든 변을 한 번씩만 지나는 경로는

$A_1A_2A_3A_4A_5A_3A_1A_4A_2$,
$A_1A_4A_3A_5A_4A_2A_3A_1A_2$

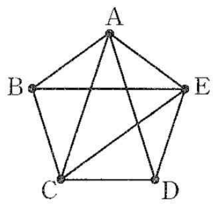
등이 있다.

18. 정답 ③

[특작 쌤의 Key Point] 주어진 행렬로 나타내어지는 그래프를 그려 각각의 경로를 확인한다.

[풀이] 주어진 행렬의 제 i행과 제 i열 $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$을 각각 차례로 A, B, C, D, E라 하면 주어진 행렬로 나타내어지는 그래프는 그림과 같다.

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{D}\\ \mathrm{E}\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}\mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow$$



ㄱ. 행렬의 모든 성분의 합은 18이고, 이는 그래프의 변의 개수의 2배이므로 구하는 변의 개수는 9이다.

ㄴ. 모든 변을 한 번씩만 지나 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 경로가 존재하려면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 짝수이어야 한다. 그런데 두 꼭짓점 B, D에 연결된 변의 개수가 모두 3이므로 모든 변을 한 번씩만 지나 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 경로는 존재하지 않는다.

ㄷ. ABCDEA와 같이 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나 출발점으로 돌아오는 경로가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고] 모든 변을 한 번씩만 지나 출발한 꼭짓점으로 돌아오는 경로가 존재하려면 모든 꼭짓점은 들어오는 변에 대하여 나가는 변이 있어야 하므로 짝수개의 변이 연결되어 있어야 한다.

19. 정답 7

[특작 쌤의 Key Point] 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 그 그래프의 변의 개수의 2배이다.

[풀이] 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 최대 $2\times{}_5C_2=20$이므로

$a+b+1+2+3 \le 20$

$\therefore\ a+b \le 14$

……㉠

이때 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 변의 개수의 2배이므로 짝수이다. 즉, $a+b$의 값은 짝수이다. ……㉡

(나)에서 꼭짓점이 5개이므로 어느 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 최댓값은 4이고,(다)에서 $a \ge 1,\ b \ge 1$이므로

$1 \le a \le 4,\ 1 \le b \le 4$

……㉢

한편, 꼭짓점 C에 연결된 변의 개수가 1이므로 연결된 변의 개수가 4인 꼭짓점은 최대 1개다.

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$의7개다.

20. 정답 ②

[Key Point] 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개 $(r \le n)$를 뽑는 조합의 수, 즉 ${}_n\mathrm{C}_r$를 이용하여 그래프의 변의 개수를 구한다.

[풀이]

ㄱ. 그래프 K_6의 변의 개수는 6개의 꼭짓점 중 2개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

ㄴ. 구하는 경로의 수는 7개의 꼭짓점 중 3개의 꼭짓점을 선택하여 차례로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_7\mathrm{P}_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

ㄷ. 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 $n-1$이고, 꼭짓점의 개수는 n이므로 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 $n(n-1)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

특별한 별해

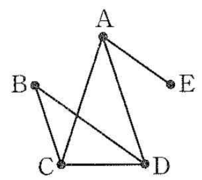
ㄷ. 그래프 K_n의 변의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$이고, 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 변의 개수의 2배이므로 그래프 K_n의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 $n(n-1)$이다.

21. 정답 ⑤

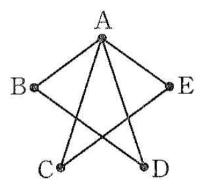
[Key Point] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬이 주어질 때에는 그래프를 직접 그려 본다.

[풀이] 주어진 행렬의 제 i행과 제 i열 $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$을 각각 차례로 A, B, C, D, E라 하면 각 행렬로 나타내어지는 그래프는 다음과 같다.

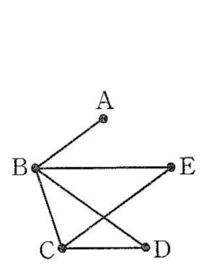
① 꼭짓점 E에 연결된 변이 한 개뿐이므로 꼭짓점 E를 지나서 다른 꼭짓점으로 가거나 올 수 없다.



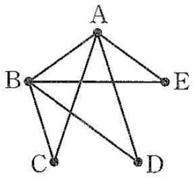
② 경로 ABD와 ACE를 연결하는 꼭짓점이 A뿐이므로 모든 꼭짓점을 다 지나려면 A를 두 번 이상 지나야 한다.



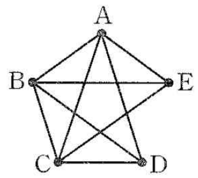
③ 꼭짓점 A에 연결된 변이 한 개뿐이므로 꼭짓점 A를 지나서 다른 꼭짓점으로 가거나 올 수 없다.



④ 세 꼭짓점 C, D, E를 지나려면 항상 꼭짓점 A 또는 꼭짓점 B를 지나야 하므로 꼭짓점 A 또는 꼭짓점 B를 두 번 이상 지나야 한다.



⑤ ADCBEA와 같이 모든 꼭짓점을 한 번씩만 지나서 출발점으로 돌아오는 경로가 존재한다.



22.

정답 (1) 풀이참조 (2) 8가지 (3) 풀이참조

(1) 주어진 그래프의 인접행렬은

$$M = \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}\text{이므로}$$

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2&2&0&0 \\ 2&2&0&0 \\ 0&0&2&2 \\ 0&0&2&2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} 2&2&0&0 \\ 2&2&0&0 \\ 0&0&2&2 \\ 0&0&2&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&4&4 \\ 0&0&4&4 \\ 4&4&0&0 \\ 4&4&0&0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3M = \begin{pmatrix} 0&0&4&4 \\ 0&0&4&4 \\ 4&4&0&0 \\ 4&4&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8&8&0&0 \\ 8&8&0&0 \\ 0&0&8&8 \\ 0&0&8&8 \end{pmatrix}$$

(2) 행렬 M^4의 $(1,\ 2)$ 성분이므로 8가지입니다.

(3) n이 홀수일 때

$$M = \begin{pmatrix} 0&0&2^{n-1}&2^{n-1} \\ 0&0&2^{n-1}&2^{n-1} \\ 2^{n-1}&2^{n-1}&0&0 \\ 2^{n-1}&2^{n-1}&0&0 \end{pmatrix}$$

n이 짝수일 때

$$M = \begin{pmatrix} 2^{n-1}&2^{n-1}&0&0 \\ 2^{n-1}&2^{n-1}&0&0 \\ 0&0&2^{n-1}&2^{n-1} \\ 0&0&2^{n-1}&2^{n-1} \end{pmatrix}$$

따라서 n이 홀수일 때, M^n의 $(1,\ 2)$성분이 0이므로 꼭짓점 A와 B 사이에 길이가 n인 경로는 없습니다.

보충설명

일반적으로 그래프의 꼭짓점이 $i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$인 그래프의 인접행렬을 $M=(m_{ij})$라고하면 꼭짓점 i에서 j로 가고 길이가 2인 경로는 $i \Rightarrow k \Rightarrow j$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) …… ㉠ 의 꼴입니다.

그런데 두 꼭짓점 $i,\ k$를 연결하는 변의 개수는 m_{ik}, 두 꼭짓점 $k,\ j$를 연결하는 변의 개수는 m_{kj}이므로, 꼭짓점 i에서 k를 거쳐 j로 가는 방법의 수는 $m_{ik}m_{kj}$입니다.

따라서 꼭짓점 i에서 j로 가고 길이가 2인 방법의 수는

$$m_{i1}m_{1j}+m_{i2}m_{2j}+\cdots+m_{in}m_{nj}$$

그런데 이 값은 M^2의 $(i,\ j)$성분이므로 꼭짓점 i에서 j로 가고 길이가 2인 방법의 수는 M^2의 $(i,\ j)$성분입니다.

이와 같은 원리로 M^n의 $(i,\ j)$성분은 꼭짓점 i에서 변을 n번 거쳐 꼭짓점 j로 가는 방법의 수입니다.

23. 정답 풀이 참조

(1) 다음과 같다.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \\ 1&0&0&1 \\ 0&1&1&0 \end{pmatrix},\ \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 2&0&0&2 \\ 0&2&2&0 \\ 0&2&2&0 \\ 2&0&0&2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 0&4&4&0 \\ 4&0&0&4 \\ 4&0&0&4 \\ 0&4&4&0 \end{pmatrix},\ \mathrm{A}^4 = \begin{pmatrix} 8&0&0&8 \\ 0&8&8&0 \\ 0&8&8&0 \\ 8&0&0&8 \end{pmatrix}$$

(2) A^4 의 $(1,\ 4)$ 성분이므로 8 가지

(3) n 이 홀수일 때

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 0&2^{n-1}&2^{n-1}&0 \\ 2^{n-1}&0&0&2^{n-1} \\ 2^{n-1}&0&0&2^{n-1} \\ 0&2^{n-1}&2^{n-1}&0 \end{pmatrix}$$

n이 짝수일 때

$$\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

n이 홀수일 때 A^n의 (1, 4) 성분이 0이므로 V_1과 V_4사이에 길이가 n인 경로는 없다.

∗ ***Note*** A^n을 유추한 결과가 옳다는 것은 수학적 귀납법(p.222)으로 증명하면 된다.

24. 정답 ⑤

전략 : 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 조사해 본다.

주어진 조건을 만족시키려면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 모두 짝수이어야 하므로 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 조사하면

① 3, 3, 4, 2, 2 ② 3, 3, 4, 3, 3

③ 2, 4, 4, 4, 3, 3 ④ 2, 4, 4, 4, 3, 4, 1

⑤ 2, 4, 4, 4, 4, 4, 2

따라서 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 모두 짝수인 것은 ⑤뿐이다.

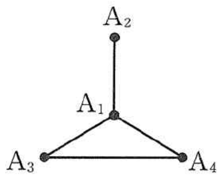
25. 정답 ③

전략 : 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬 M에 대하여 행렬 M^2의 $(i,\ j)$ 성분은 꼭짓점 A_i에서 변을 2개 지나 꼭짓점 A_j로 가는 방법의 수를 의미한다.

행렬 A^2의 $(i,\ j)$ 성분은 꼭짓점 A_i에서 변을 2개 지나 꼭짓점 A_j로 가는 방법의 수를 나타낸다. 즉, 행렬 A^2의 $(i,\ i)$ 성분은 꼭짓점 A_i에서 출발하여 다른 한 꼭짓점을 갔다가 같은 변을 지나 꼭짓점 A_i로 오는 방법의 수를 나타내므로 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 나타낸다.

따라서 주어진 행렬 A^2의 $(i,\ j)$ 성분이 3, 1, 2, 2이므로 네 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 3, 1, 2, 2인 그래프를 찾으면 ③이다.

참고 : 오른쪽 그림과 같이 그래프 ③의 꼭짓점을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$라 하면



$$A=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

에서

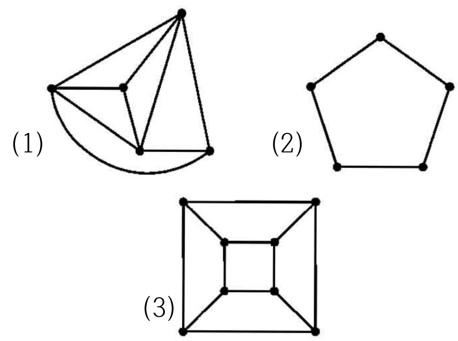
$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다.

26. 정답 풀이참조

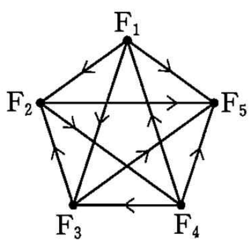
∗ ***Note*** 어떤 변도 만나지 않게 그릴 수 있는 그래프를 평면그래프라고 한다.



27. 정답 풀이참조

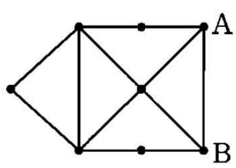
(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2)



(3) 다섯 팀이 한 시합의 총수

28. 정답 가장 오른쪽의 아랫방

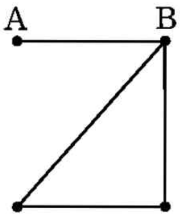


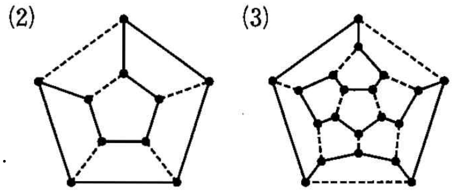
방을 꼭짓점, 문을 변으로 하는 그래프를 그

리면 위와 같다. 이때 입구(A)에서 시작하는 한붓그리기를 하면 연결된 변의 개수가 홀수인 점 B 에서 끝나므로 여기에 출구를 만들어야 한다. 곧, 가장 오른쪽의 아랫방이다.

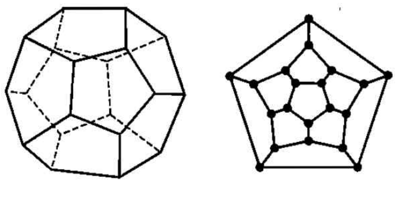
29. 정답 풀이참조

(1) 오른쪽 그림에서 꼭짓점 A 에 갔다 오기 위해서는 점 B 를 두 번 지나야 하므로 구하는 경로는 없다

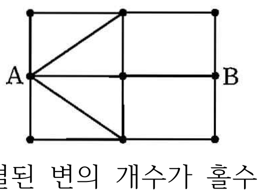




∗ *Note* 1. 모든 꼭짓점을 한 번만 지나 돌아오는 경로를 해밀턴회로라고한다. 해밀턴회로는 모든 변을 지나지 않을 수도 있다.
2. (3)에서 구한 경로를 이용하면 정십이면체에서 모서리를 따라서 모든 꼭짓점을 한 번만 지나 출발한 꼭짓점으로 돌아올 수 있다.



30. 정답 (1) 있다. (2) 없다.



A, B 에 연결된 변의 개수가 홀수이다.
(1) 있다. (2) 없다.

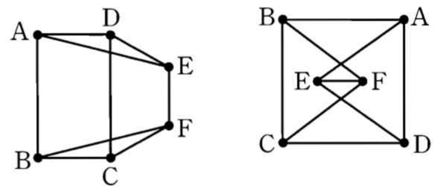
31. 정답 (1)없다. (2) 없다.

(1) 꼭짓점이 n 개이고, 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 모두 다르다고 하면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ 개여야 한다.
그런데 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 $n-1$ 개이면 이 꼭짓점과 다른 모든 꼭짓점이 변으로 연결되어 있다. 따라서 연결된 변의 개수가 0 개인 꼭짓점이 있을 수 없다. 따라서 모순이다.
따라서 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 모두 다른 그래프는 없다.

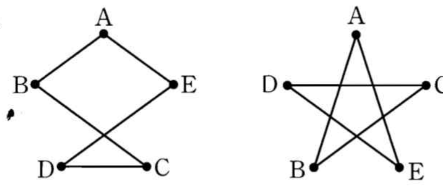
(2) 9 명을 꼭짓점으로 하고, 악수를 한 사람끼리 변으로 연결하면 그래프이다. 이때 모든 사람이 5 번씩 악수하였다고 하면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 5 개다. 따라서 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 45 이다. 그런데 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 짝수이어야 하므로 이런 경우는 없다.

32. 정답 ⑤

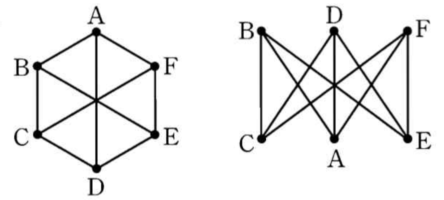
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 같은 그래프끼리 짝지어져 있다.

33. 정답 12

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 총합은 그래프의 변의 개수의 2배이므로
$2+2+3+a+b=2\cdot 5$
$\therefore a+b=3$
이때 a, b는 자연수이고 $a\le b$이므로
$a=1$, $b=2$

$\therefore 10a+b=12$

34. 정답 (1) 6 (2) 5

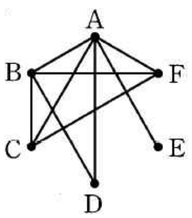
각 선수를 꼭짓점으로 놓고, 경기를 치르는 두 선수의 꼭짓점을 변으로 연결하는 그래프에서 경기의 수는 그래프의 변의 개수와 같다.

(1) 꼭짓점의 개수가 4인 그래프의 모든 꼭짓점을 서로 연결하면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 3이므로
$\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$

(2) 2조가 치르는 경기의 수는 $16-6=10$
즉, 꼭짓점이 a개인 그래프의 모든 꼭짓점을 서로 연결했을 때, 그래프의 변의 개수가 10이므로
$\dfrac{a(a-1)}{2}=10$
$a^2-a-20=0$, $(a+4)(a-5)=0$
$\therefore a=5$ $(\because a>0)$

35. 정답 ③

전략 : 조건을 만족시키는 그래프를 그려본다.



꼭짓점을 A, B, C, D, E, F로 놓고 꼭짓점 A, B, C, D, E 에 연결된 변의 개수가 각각 $5, 4, 3, 2, 1$인 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 따라서 나머지 꼭짓점 F에 연결된 꼭짓점의 개수는 3이므로 $n=3$

36. 정답 ①

전략 : 조건을 만족시키는 경로를 빠짐없이 구한다.

ㄱ. 꼭짓점의 개수는 7이고, 변의 개수는 12이므로 $7+12=19$

ㄴ. 구하는 경로의 수는
$ABCDEFG, ABCDFEG,$
$ABCEDFG, ABDCEFG$
$ABFDCEG, ACBDEFG,$
$ACBDFEG, ACBFDEG$
$ACDBFEG, ACEDBFG$의 10

ㄷ. 구하는 경로의 수는
$ABDFGECA, ABFGEDCA, ACDEGFBA,$
$ACEGFDBA$의 4

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

37. 정답 풀이참조

전략 : 행렬 $A+A^2$ 의 성분이 의미하는 것을 파악한다.

(1)
$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은 8이다.

(2)
$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)
$$A+A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 $(2, 3)$ 성분은 P_2에서 도로를 1개 지나서 P_3으로 가는 경로의 수이고, 행렬 A^2의 $(2, 3)$ 성분은 P_2에서 도로를 2개 지나서 P_3으로 가는 경로의 수이다.

따라서 구하는 경로의 수는 행렬 $A+A^2$의 $(2, 3)$ 성분과 같으므로 2이다.

38. 정답 10

전략 : 꼭짓점의 개수가 n인 그래프에서 변의 개수의 최댓값은 $\dfrac{n(n-1)}{2}$임을 이용한다.

꼭짓점의 개수가 최소일 때는 각 꼭짓점이 다른 모든 꼭짓점과 변으로 연결되어 있을 때이다.

꼭짓점의 개수를 a라 하면 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 $a-1$이므로

$$\frac{a(a-1)}{2}=45$$

$$a^2-a-90=0,$$

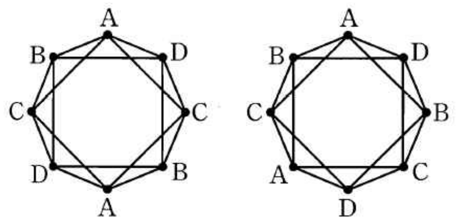
$$(a+9)(a-10)=0$$

$$\therefore a=10 \ (\because a\text{는 자연수})$$

39. 정답 4

전략 : 한 꼭짓점을 색 A로 칠하면 그 꼭짓점과 변으로 연결된 꼭짓점은 색 A와 다른 색으로 칠해야 한다.

다음 그림과 같이 그래프를 색칠할 때, 필요한 최소의 색의 수는 4이다



[예시 1] [예시 2]